

منشورات جامعة دمشق
كلـية الاقتـصاد

رياضيات التأمين

الدكتور
عمار ناصر آغا
أستاذ مساعد في قسم الإحصاء التطبيقي

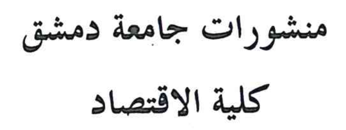
الدكتور
عادل القضماني
أستاذ مساعد في قسم المصارف والتأمين

١٤٣١ - ١٤٣٢هـ
٢٠١٠ - ٢٠١١م

جامعة دمشق

رياضيات التأمين

Mathematics of Insurance



منشورات جامعة دمشق

كلية الاقتصاد



رياضيات التأمين

الدكتور

عمار ناصر آغا

أستاذ مساعد في قسم الإحصاء التطبيقي

الدكتور

عادل القضماني

أستاذ مساعد في قسم المصارف والتأمين

جامعة دمشق

1432/ 1431 هـ

2011/ 2010 م



المحتويات

مقدمة

يزداد التركيز على التأمين في مختلف أنحاء العالم باعتبـــاره ركيـــزة أساســـية لتحقيق لأي ازدهار أو تطور في حياة البشر وأداة هامة لتجديد الـــدخول والثـــروات بنتيجة ما يصيبها من نقص أو تلف أو فقدان ، بالإضافة الى الدور الذي يقوم بـــه في تعبئة المدخرات وتوجيهها للإستثمار في الأقنية المختلفة وبما يدعم عملية التنمية.

في هذا الإطار، تشكل الجوانب الفنية والأســـاليب والأدوات المتعلقـــة بهـــا وخصوصاً الرياضيات ركناً هاما مكملاً لنظرية الخطر والتأمين.

يأتي كتابنا هذا ليغطي رياضيات التأمين على الحياة أو كمـــا تعـــرف بـــ الرياضيات الاكتوارية بأسلوب يتميز بالبساطة والوضوح وبما يتناسب مع مـــستويات طلاب كليات الاقتصاد ، حيث أوردنا في محتوياته التالي:

في الفصل الأول عمدنا الى تقديم حول الفوائد المالية بـــدءاً مـــن الفائـــدة وعناصرها ثم الفائدة البسيطة ومعالجة الفائدة البسيطة في حالة عدم التجانس بين معدل الفائدة وفترة الدورة الزمنية .

أما الفصل الثاني فقد تضمن الفائدة المركبة والقيم المستقبلية والحالية ومعدل الفائدة ، القيمة المستقبلية لمبلغ، القيمة الحالية لمبلغ ، معدل الفائدة المركبـــة ، فتـــرة الاستثمار، قانون الفائدة المركبة عند إضافة الفائدة أكثر من مرة سنوياً ، قانون الفائدة المركبة المستمرة ، الزمن المضاعف لمبلغ أصلي، معدل الفائدة السنوي الاسمي، معدل الفائدة السنوي الحقيقي .

الفصل الثالث تضمن الدفعات الدورية من تذكير ببعض المفاهيم الأساسية ثم القيمة الحالية للدفعات الدورية السنوية، القيمة الحالية للدفعات الدورية الجزئية، القيمة المستقبلية للدفعات الدورية السنوية و القيمة المستقبلية للدفعات الدورية لجزئية.

في حين احتوى **الفصل الرابع** جداول الحياة والوفاة من تعريف جداول الحياة والوفاة، تكوين جداول الحياة والوفاة، أساليب إنشاء جدول الحياة والوفيات ثم تطبيقات على استخدام جداول الحياة و الوفاة، توقع الحياة، المعدل الآني للوفاة.

أما **الفصل الخامس** فقد تضمن جداول الرموز الحسابية أوجداول الاستعاضة أو جداول الاستبدال بدءاً بتعريف بجداول الرموز الحسابية ومعدل الفائدة الفنِّي ومكونات جداول الرموز الحسابية .

الفصل السادس تضمن أسس حساب الأقساط حيث عرضنا أولاً القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين الوقفية البحتة ثم الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق دفعات الحياة و الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق تأمين دفعات دورية جزئية لمدى الحياة.

في حين ناقشنا في **الفصل السابع** الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق التأمين التي بموجبها تدفع مبالغ التأمين في حالة الوفاة فقط ، حيث غطينا القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وفاة لمدى الحياة ، القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وفاة لمدى الحياة مؤجل، القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وفاة مؤقت ، القسط الوحيد الصافي للتأمين في حالة الوفاة على مبلغ متغير مع زمن الوفاة ، القسط الوحيد الصافي للتأمين المؤقت في حالة الوفاة وذلك على مبلغ متغير مع زمن الوفاة .

في **الفصل الثامن** عالجنا الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق التأمين التي بموجبها تدفع مبالغ التأمين في حالتي الحياة أو الوفاة (التأمين المختلط) وذلك لكل من وثيقة تأمين مختلط عادي ، وثيقة تأمين مختلط مضاعف ، وثيقة تأمين مختلط نصفي ، وثيقة تأمين رأس المال المؤجل مع رد الأقساط، وثيقة تأمين مختلط مع الاشتراك في الأرباح و القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين مركبة .

الفصل التاسع تضمن الأقساط السنوية الصافية والتجارية ، حيث تم بين كيفية معالجة كل من الأقساط لسنوية الصافية لوثائق التأمين في حالة الحياة ،الأقساط السنوية الصافية لوثائق التأمين في حالة الوفاة ،الأقساط السنوية الصافية لوثائق التأمين المختلط ، الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين في حالة الحياة، الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين في حالة الوفاة ، الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين المختلط ، الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين مع استرداد الأقساط.

أما في **الفصل العاشر** فقد أوردنا كيفية معالجة احتياطيات التأمين ببيان الاحتياطيات وأهميتها ، الاحتياطي الرياضي الصافي ، احتياطي التعويضات تحت التسوية ، احتياطي التعويضات تحت التسديد ، الاحتياطي الإضافي ثم المعالجة الرياضية للاحتياطي الرياضي الصافي و الاحتياطي الحسابي في حالة السداد بقسط وحيد صافي وكذلك الاحتياطي الحسابي في حالة السداد بعدد محدد(مؤقت) من الأقساط .

عالجنا في الفصل الأخير موضوعات تتعلق بالإلغاء والتصفية والاستبدال بالإضافة الى تعديل مدة السداد والاقتراض .

وفي الختام أوردنا في الملحق مجموعة متميزة من الجداول المالية الضرورية بالإضافة الى جداول الحياة والوفاة والرموز الحسابية التي تم على أساسها حل ومعالجة تطبيقات الكتاب.

هذا الكتاب أنجز بجهد مشترك من قبل الدكتور عادل القضماني (الأستاذ المساعد في قسم المصارف والتأمين) والدكتور عمار ناصر آغا (الأستاذ المساعد في قسم الإحصاء التطبيقي) .

المؤلفان

الفصل الأول

الفائدة البسيطة

Simple interest

1.1- الفائدة المالية

1.2- الفائدة البسيطة

1.3- معالجة الفائدة البسيطة في حالة عدم التجانس بين معدل الفائدة وفترة الـــدورة الزمنية

1.4- تمارين غير محلولة

الفصل الأول
الفائدة البسيطة

1.1- الفائدة المالية Financial Interest

تعرف الفائدة المالية بشكل عام بأنها نسبة مئوية تعبر عن العائد الناتج عن استثمار الأموال أو إقراضها للغير. وهي من وجهة نظر مقترض المال (المدين)، بمثابة أجرة رأس المال المقترض أو تكلفة استخدامه للرأسمال المقترض، في حين هي فائدة الاستثمار من وجهة نظر مقرض المال(صاحب رأس المال أو الدائن).

تنقسم الفوائد المالية إلى:

-**الفوائد البسيطة:** ومعظم استخداماتها في القروض و الاستثمارات والعمليات التجارية قصير ة الأجل التي لا تتجاوز فترتها الزمنية السنة الواحدة.

- **الفوائد المركبة:** واستخداماتها تتركز في القروض و الاستثمارات و العمليات التجارية طويلة الأجل و التي تتجاوز فترتها الزمنية السنة الواحدة.

1.1.1- معدل الفائدة: Interest Rate

هو عبارة عن العائد الناتج عن استثمار وحدة نقدية واحدة من رأس المال في نهاية دورة زمنية واحدة. وجرت العادة على استخدام السنة الواحدة كدورة زمنية ، و مئة الوحدة النقدية في التعبير عن معدل الفائدة ، إذ نقول يبلغ معدل الفائدة 0.08 سنوياً، أي ثماني وحدات نقدية على كل مئة وحدة نقدية يتم استثمارها أو اقتراضها لمدة عام و هكذا...

1.1.2- المبلغ المستثمر أو المبلغ المقترض: Borrowed

وهو القيمة الأصلية للقرض و الذي يترتب على استخدامه دفع الفائدة التي يلتزم بها طالب القرض(المدين).

1.1.3- الدورة الزمنية: Period (time)

وهبي المدة التي يستحق بعد انتهائها مبلغ الفائدة.وهي عادة السنة إذا لم يذكر في الاتفاق شيء آخر. وهنا يكون معدل الفائدة سنوياً، أما إذا اتفق على دفع الفائدة شهرياً أو فصلياً أو نصف سنوياً فيجب ذكر معدل الفائدة الجزئي صراحة.

لنرمز إلى معدل الفائدة السنوي بـ i ولحجم المبلغ المقترض أو المستثمر بـ C ولمدة الاقتراض أو الاستثمار بالسنوات بـ n وهي تشكل مجتمعة عناصر الفائدة.

1.2- الفائدة البسيطة: Simple Interest

يتم حساب معدل الفائدة عن فترة زمنية محددة بمعدل الفائدة المعين عن الدورة الزمنية المحددة، والمترتبة على أصل المبلغ المقترض أو المستثمر، إذ يجري حساب أو دفع مقدار الفائدة في نهاية كل دورة زمنية ، ويبقى رأس المال الأصلي ثابتاً، أي دون أن تضاف الفائدة إلى المبلغ الأصلي حتى لا تأخذ فائدة جديدة.

إذا رمزنا للفائدة بالرمز I فهذا يؤدي إلى أنه بنهاية n سنة تتكون فوائد مقدارها:

$$I = c \cdot i \cdot n$$

وبالتالي تشكل الفوائد والمبلغ الأصلي ما يطلق عليه بـ جملة المبلغ C_n :

$$C_n = C + \mathrm{I}$$
$$C_n = C + (C \cdot i \cdot n)$$

$$\boxed{C_n = C(1 + i \cdot n)} \qquad [1]$$

وهو قانون الفائدة البسيطة المتعلق بجملة إيداع مبلغ C بمعدل فائدة بسيطة سنوي i ولعدد من السنوات الزمنية n سنة.

و من قانون الفائدة البسيطة يمكن ببساطة حساب قيم عناصر مجهولة للفائدة بوجود قيم معلومة لعناصر أخرى وذلك كالتالي:

لحساب أصل المبلغ المقترض أو المستثمر C:

$$C = C_n / (1 + i \cdot n) \qquad [2]$$

أو

$$C = I / (i \cdot n)$$

لحساب معدل الفائدة البسيطة السنوي:

$$i = I / (c \cdot n) \qquad [3]$$

لحساب فترة الاستثمار أو عدد الدورات الزمنية n :

$$n = I / (c \cdot i) \qquad [4]$$

مثال:

احسب كل من الفائدة المستحقة وجملة المبلغ المتشكل من جراء استثمار 100000 ل.س لمدة سنتين بمعدل فائدة بسيطة مقداره 9% سنوياً.

الحل:

هنا لدينا:

$$C = 100000$$
$$i = 0.09$$
$$n = 2$$

وبالتالي، فإن مقدار الفائدة المتحققة I :

$$I = c.i.n$$

$$=100000(0.09)(2)=18000 \text{ ل.س}$$

أما جملة المبلغ :

$$C_2=100000+18000$$
$$=118000 \text{ ل.س}$$

مثال:

عند استثمار 500000 ل.س بفائدة بسيطة ولمدة سنتين تم الحصول في نهاية تلك المدة على مبلغ مقداره 562500 ل.س، والمطلوب حساب معدل الفائدة البسيطة السنوي.

الحل:

$$C_n=C(1+i\cdot n)$$
$$562500=500000(1+2\cdot i)$$
$$=500000+1000000i$$

وبالتالي:

$$i=\frac{62500}{1000000}=0.062500=6.25\%$$

1.3- معالجة الفائدة البسيطة في حال عدم التجانس بين معدل الفائدة و فترة الدورة الزمنية:

في الأمثلة السابقة نلاحظ أن معدل الفائدة مأخوذ على أساس سنوي وأن طول الدورة الزمنية هو السنة أيضاً . أما في الحالات التي لا يكون فيها هذا التجانس، أي يكون هناك اختلاف، كأن يعطى عدد الدورات الزمنية n بالسنوات و معدل الفائدة شهرياً أو نصف سنوياً أو ربع سنوياً، أو أن تكون n بالأشهر أو بالأيام ومعدل الفائدة سنوياً وهكذا..... في مثل هذه الحالات لا بد من إجراء الحسابات لإعادة التجانس إلى هذين المتحولين ولذلك نتبع الإجراءات التالية:

أولاً:إذا كان عدد الدورات الزمنية بالسنوات:

في هذه الحالة، ينبغي أن يكون معدل الفائدة أيضاً سنوياً. ولتحويـــل معـــدل الفائدة المعطى لفترة أقل من السنة، نضربه بعدد الفترات المكونة للسنة الواحدة، وذلك كما يلي:

يتم تحويل معدل الفائدة نصف السنوي i_* إلى معدل فائدة سنوي i بـــضربه بـــ 2 كما يلي:

$$i = i_* \cdot 2$$

لتحويل معدل الفائدة ربع السنوي i_* إلى معدل فائدة سنوي i بضربه بـــــ 4 كما يلي:

$$i = i_* \cdot 4$$

لتحويل معدل الفائدة اليومي i_* إلى معدل فائدة سنوي i نـــضربه بالعـــدد المناسب كما يلي:

أ- (السنة التجارية أو الفائدة التجارية)

$$i = i_* \cdot 360$$

ب- (السنة الحقيقية <عادية> أو الفائدة الصحيحة) :

$$i = i_* \cdot 365$$

ج- (السنة الحقيقية<كبيسة> أو الفائدة الصحيحة)

$$i = i_* \cdot 366$$

مثال:

استثمر شخص مبلغ 200000 ل.س وفق الفائدة البسيطة و لمـــدة ســـنتين، احسب جملة المبلغ المستثمر في نهاية المدة إذا علمت:

معدل الفائدة نصف سنوي ومقداره 5%

معدل الفائدة ربع سنوي ومقداره %3

معدل الفائدة شهري ومقداره 2 %

معدل الفائدة يومي ومقداره 0.3 % (وفق الطريقة التجارية)

الحل:

$$C = 200000$$
$$n = 2$$
$$C_2 = ?$$

1- بما أن معدل الفائدة نصف سنوي ومقداره $i_* = \%5$ نجد أن معدل الفائدة السنوي i يساوي:

$$i = i_* \cdot 2 = \%10$$

وبالتالي فإن جملة هذا المبلغ تساوي :

$$C_2 = 200000(1 + 0.10(2))$$
$$= 200000 + 40000$$
$$= 240000$$ ل.س

2- بما أن معدل الفائدة ربع السنوي ومقداره $i_* = \%3$ فإن المعدل السنوي i يساوي:

$$i = i_* \cdot 4 = 12\%$$

وبالتالي:

$$C_2 = 200000(1 + 0.12(2))$$
$$= 200000 + 48000$$
$$= 248000$$ ل.س

3- بما أن معدل الفائدة شهري $i_* = \%2$ فإن المعدل السنوي يساوي:

$$i = i_* \cdot 12 = \%24$$

وبالتالي:

$$C_2 = 200000(1+0.24(2))$$

$$= 200000 + 96000$$

$$= 296000$$ ل.س

4- بما أن معدل الفائدة يومي $i_* = 0.03\%$ فإن المعدل السنوي حسب الطريقة التجارية يساوي :

$$i = i_* \cdot 360 = \%10.8$$

وبالتالي:

$$C_2 = 200000(1+0.108(2))$$

$$= 200000 + 43200$$

$$= 243200$$ ل.س

ملاحظة:

إذا لم يشر صراحة إلى الطريقة الواجب استخدامها أو لم يذكر نوع السنة فهذا يعني صراحة أنه يجب استخدام السنة التجارية .

ثانياً، إذا كان عدد الدورات الزمنية بالأشهر:

إذا كان عدد الدورات الزمنية (فترة الاستثمار) معطاة بالأشهر n_* ومعدل الفائدة سنوياً، نقوم بتحويل عدد الدورات بالأشهر إلى عدد الدورات بالسنة n وذلك بالقسمة على12 أي:

$$n = n_* / 12$$

أو نقوم بتحويل معدل الفائدة السنوي إلى معدل فائـــدة شـــهري بالقـــسمة على12 ، بحيث يكون هناك تجانس بين الفترة الزمنية ومعدل الفائدة.

مثال:

احسب جملة مبلغ مستثمر قدره 350000 ل.س بمعدل فائدة بسيطة قدره %9 سنوياً في نهاية 15 شهراً من الآن.

الحل:

$$C = 350000$$
$$n_* = 15$$
$$i = \%9$$

نلاحظ عدم وجود تطابق بين عدد الدورات الزمنية (بالأشهر) وبين معـــدل الفائدة (سنوي)، لذلك نجعل عدد الدورات الزمنية بالسنة:

$$n = n_* / 12 = 15/12 = 1.25$$

وبالتالي:

$$C_{1.25} = C(1 + i \cdot n)$$
$$= 350000(1 + (0.09)(1.25))$$
$$= 389375 \text{ ل.س}$$

أو نقوم بتحويل معدل الفائدة السنوي إلى معدل فائدة شهري:

$$i = i_* / 12$$

$$= 0.0075$$

وبالتالي تكون جملة المبلغ بعد خمسة عشر شهراً مساويةً إلى:

$$= 350000(1 + (0.0075)(15))$$
$$= 350000 + 39375$$
$$= 389375 \text{ ل.س}$$

وهو الجواب السابق نفسه.

ثالثاً، إذا كان عدد الدورات الزمنية بالأيام:

ومعدل الفائدة سنوياً، نجري تحويل عدد الدورات الزمنية من أيام إلى سنوات وذلك إما بالطريقة التجارية (باعتبار أن السنة تجارية وعدد أيامها 360 يوماً). أو بالطريقة الصحيحة (باعتبار أن السنة حقيقية وعدد أيامها إذا كانت سنة عادية 365يوماً وإذا كانت كبيسة 366 يوماً).

مثال:

اقترض شخص مبلغ 500000 ل.س من أحد المصارف بتاريخ 15/8/1998 بمعدل فائدة بسيطة قدره 9%سنوياً، والمطلوب حساب جملة المبلغ بتاريخ 20/3/1999.

الحل:

$$C = 500000$$

وبما أنه لم يذكر نوع السنة أو نوع الطريقة، فهذا يعني ضمناً أننا سنستخدم السنة التجارية:

$$n = n_{*} / 360$$

لحساب n_{*} ، أي عدد أيام الأشهر بدءاً من 15/8/1998 وحتى 20/3/1999 مع ملاحظة أن عدد أيام شهر شباط هي 28 يوماً نظراً لأن عام 1999 هو من السنوات العادية (لا تقبل القسمة على 4 بدون باقٍ)، نعد الجدول التالي:

ار	شباط	كانون2	كانون1	تشرين2	تشرين 1	أيلول	آب	الشهر
2	28	31	31	30	31	30	**31-15=16**	عدد الأيام

من الجدول نجد أن:

$$n = 16 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 28 + 20 = 217$$

وبالتالي فإن المدة بالسنوات تساوي:

$$n = 217/360 = 0.60278 \Rightarrow$$

وإن جملة المبلغ تساوي :

$$= 500000(1 + (0.09)(0.60278))$$
$$= 500000 + 27125$$
$$= 527125$$ ل.س

مثال:

أعد المثال السابق إذا كانت الفترة الزمنية من 15/8/2000 إلى 20/3/2001 وباعتبار أن السنة حقيقية(الفائدة صحيحة).

الحل:

نلاحظ هنا أن السنة 2000 هي سنة كبيسة(لأن 2000 تقبل القسمة على 4 بدون باقٍ) بينما السنة 2001 هي عادية. في هذه الحالة نجزئ الفترة الزمنية (بالأيام) إلى n_1 ممثلة للأيام الواقعة في السنة الكبيسة و n_2 للأيام الواقعة في السنة غير الكبيسة و يكون التحويل باستخدام القانون:

$$n = \frac{n_1}{366} + \frac{n_2}{365}$$

آذار	شباط	كانون2	كانون1	تشرين2	تشرين 1	أيلول	آب	الأشهر
20	28	31	31	30	31	30	31-15	الأيام

$$n_1 = 16 + 30 + 31 + 30 + 31 = 138$$
$$n_2 = 31 + 28 + 20 = 79$$
$$n = \frac{138}{366} + \frac{79}{365} = 0.5934884$$

أما جملة المبلغ فتساوي:

$$= 500000(1 + (0.09)(0.5934884))$$
$$= 500000 + 26706.976$$
$$= 526706.98$$

ملاحظة:

في المثال السابق وبافتراض أنه لم يحدد نوع السنة أو نوع الطريقة، فهذا يعني ضمناً أن السنة تجارية أي أن عدد الأيام الذي يستخدم في التحويل هو 360 يوماً.

مثال:

أعد المثال السابق معتمداً السنة التجارية (الفائدة التجارية).

الحل:

$$n = \frac{n_1 + n_2}{360} = \frac{217}{360} = 0.60278$$

جملة المبلغ $= 500000(1 + (0.09)(0.60278))$

$$= 500000 + 27125$$

$= 527125$ ل.س

ملاحظة:

من خلال الأمثلة السابقة وعند حساب طول الفترة الزمنية، نجد أن المدة تحسب بعدد الأيام بين التاريخ الأول و التاريخ الثاني، أو عدد الأيام بين تاريخ الإيداع

و تاريخ السحب، حيث من المعتاد أن يسقط يوم الإيداع من الحساب ، و يلحظ يوم السحب.

مثال:

اقترض شخص مبلغ 500000 بفائدة بسيطة و لمدة 15 شهراً، حيث سيسدد في نهايتها مبلغاً جملته 562500 ل.س المطلوب حساب:

معدل الفائدة البسيطة السنوي.

معدل الفائدة البسيطة نصف السنوي.

معدل الفائدة البسيطة ربع السنوي.

معدل الفائدة البسيطة الشهري.

معدل الفائدة البسيطة اليومي.

الحل:

حساب معدل الفائدة البسيطة السنوي:

$$C_n = C(1 + i.n)$$

$$562500 = 500000(1 + 1.25i)$$

$$= 500000 \quad + 625000 \; i$$

وبالتالي:

$$i = \frac{62500}{625000} = 0.10 = \%10$$

حساب معدل الفائدة البسيطة نصف السنوي:

يتطلب هذا أن نستخدم فترة الاستثمار بأنصاف السنوات، أي:

$$n = \frac{15}{6} = 2.5$$

بالتعويض في قانون الفائدة البسيطة:

$$562500 = 500000(1 + 2.5i)$$

$$= 500000 + 1250000\ i$$

وبالتالي:

$$i = \frac{62500}{1250000} = 0.05 = \%5$$

حساب معدل الفائدة البسيطة ربع السنوي (الفصلي):

$$n = \frac{15}{3} = 5$$

بالتعويض في قانون الفائدة البسيطة:

$$562500 = 500000(1 + 5i)$$

$$= 500000 + 2500000i$$

وبالتالي:

$$i = \frac{62500}{2500000} = 0.025 = \%2.5$$

حساب معدل الفائدة البسيطة الشهري:

$$n = 15$$

بالتعويض في قانون الفائدة البسيطة:

$$562000 = 500000(1 + 15i)$$

$$= 500000 + 7500000\ i$$

وبالتالي:

$$i = \frac{62500}{7500000} = 0.0749 = \%7.49$$

حساب معدل الفائدة البسيطة اليومي:

بما أنه لم يذكر نوع السنة أو الأشهر فهذا يعني ضمناً تطبيق الفائدة التجارية ،وبالتالي الشهر يعادل 30 يوماً ، كون السنة 360 يوماً، أي أن الزمن الاستثماري n

يصبح:

$$n = 15 \cdot 30 = 450$$ يوماً

وبالتالي:

$$562500 = 500000(1 + 450i)$$
$$= 500000 + 225000000 \ i$$

وبالتالي:

$$i = \frac{62500}{225000000} = 0.000278 = \%0.000003$$

تقريباً

مثال :

اقترض شخص مبلغ 400000 ل.س من شخص آخر لمدة ثلاث سنوات وستة أشهر وخمسة عشر يوماً ، وذلك بمعدل فائدة بسيطة قدره 11 %سنوياً. احسب جملة المبلغ الذي سيرده الشخص للدائن .

الحل:

$$c = 400000$$
$$i = 0.11$$

وبما أنه لم يذكر أي شيء حول نوع السنة أو نوع الفائدة فهذا يعني أنه ينبغي اعتماد السنة التجارية (الفائدة التجارية) وبالتالي نحسب الفوائد بالشكل:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1 = 400000(0.11)(3) = 132000$$ ل.س

وهي الفائدة عن ثلاث سنوات

$$I_2 = 400000(0.11)(6/12) = 22000$$ ل.س

و هي الفائدة عن ستة أشهر

$I_3 = 400000(0.11)(15/360) = 1833.33$ ل.س

وهي الفائدة عن الخمسة عشر يوماً.

وبذلك يكون إجمالي الفائدة مساوياً إلى:

$I = 155833.33$ ل.س

وبالتالي فإن جملة المبلغ تساوي :

$C_n = 400000 + 155833.33 = 555833.33$ ل.س

1.4- تمارين غير محلولة

1- اقترض أحد الأشخاص مبلغاً قدره 500000 ل.س بشرط أن يسدد المبلغ المقترض مع فوائده بعد ثلاث سنوات ، أوجد الفائدة المستحقة و جملة المبلغ المتشكل (إذا علمت أن معدل الفائدة السنوي 10% و إن الفائدة هي فائدة بسيطة) .

2- اقترض أحد الأشخاص مبلغاً قدره 200000 ل.س و بعد خمس سنوات سدد المبلغ مع فوائده و كان يعادل 300000 ل.س ، احسب معدل الفائدة البسيطة السنوي .

3-أوجد جملة مبلغ مستثمر 400000 ل.س لمدة ثلاث سنوات ، و ذلك وفق مبدأ الفائدة البسيطة إذا علمت أن معدل الفائدة كان :

سنوي و يساوي 10%

نصف سنوي و يساوي 5%

جـ- ربع سنوي و يساوي 2.5%

د- يومي و يساوي 0.03%

4- أوجد جملة مبلغ مستثمر 1000000 ل.س بمعدل فائدة بسيطة 8% و ذلك لمدة :

أ- سنة و نصف

ب- سنة و ربع

جـ - ثمانية أشهر

د- واحد و عشرون شهراً

5-استثمر مبلغ قدره 350000 ل.س و ذلك في 20/7/2002 بفائدة بسيطة سنوية قدرها 8% ، احسب جملة المبلغ المستثمر في 25/2/2003 (وفق الطريقة الفرنسية ، و وفق الطريقة الانكليزية)

6- سحب رجل من المصرف مبلغاً قدره 1500000 ل.س و لمدة 15 شهراً حيث سيعيد في نهاية الـ 15 شهراً مبلغاً جملته 1700000 ل.س ، احسب معدل الفائدة السنوي و نصف السنوي و ربع السنوي و الشهري و اليومي ، إذا علمت أن هذا المصرف يعمل بمبدأ الفائدة البسيطة .

7- استثمر مبلغ 10000 دولار بفائدة بسيطة خلال فترة من الزمن، و كانت فائدته في نهايتها 175 دولاراً ، احسب مدة الاستثمار علماً أن معدل الفائدة السنوي هو 7% .

الفصل الثاني

الفائدة المركبة

Compound Interest

2.1 – الفائدة المركبة والقيم المستقبلية والحالية ومعدل الفائدة

2.1.1–جملة المبلغ.

2.1.2–القيمة الحالية لمبلغ

2.1.3 –معدل الفائدة المركبة

2.1.4 – فترة الاستثمار

2.2– قانون الفائدة المركبة عند إضافة الفائدة أكثر من مرة سنوياً

2.3–قانون الفائدة المركبة المستمرة

2.4–الزمن المضاعف لمبلغ أصلي

2.5–معدل الفائدة السنوي الاسمي

2.6–معدل الفائدة السنوي الحقيقي

2.7– تمارين غير محلولة

الفصل الثاني

الفائدة المركبة

سبق وأن وجدنا في الفصل السابق أن الفائدة هي التكلفة التي يتحملها المقترض لقاء حصوله على رأس المال، وبذلك فإن معدل الفائدة(أو سعر الفائدة) يقوم بدور كبير في السياسة المالية لإدارة الاقتصاد الوطني.

2.1- الفائدة المركبة والقيم المستقبلية والحالية:

الفائدة المركبة هي الفائدة التي تضاف إلى المبلغ الأصلي في نهاية كل دورة زمنية وتضاف إليه لتشكل معه مبلغاً أصلياً جديداً قابلاً هو الآخر لأن يستثمر وينتج فائدة جديدة.

2.1.1- القيمة المستقبلية لمبلغ (أو جملة مبلغ):

بفرض أنه تم إيداع مبلغ 1000ل.س في أحد المصارف بمعدل فائدة سنوي قدره 7% ، فإنه في نهاية السنة الأولى وبحسب قانون الفائدة البسيطة تكون جملة المبلغ المذكور هي:

$$C_1 = C(1+in) = C(1+i)$$
$$= 1000(1.07) = 1070 \text{ ل.س}$$

المبلغ الأخير أصبح رأسمالاً جديداً، إذا استمر إيداعه خلال السنة التالية، فتكون جملة المبلغ في نهاية تلك السنة الثانية مساويةً إلى:

$$C_2 = C_1(1+i)$$
$$= C(1+i)(1+i)$$
$$= C(1+i)^2 = 1000(1+0.07)^2 = 1144.9 \text{ ل.س}$$

وهكذا إذا استمر إيداع المبلغ المتكون خلال عدد من السنوات قدره n ،

فتكون جملة المبلغ C في نهاية الـــ n سنة هي C_n ، وبالتالي:

$$c_n = c(1+i)^n \qquad [5]$$

وهو قانون الفائدة المركبة الذي يعطي جملة المبلغ الذي تم استثماره بمعدل فائدة مركبة قدره i سنوياً ، حيث يطلق على المقدار $(1+i)^n$ أو u^n معامل الفائدة المركبة، وتسهيلاً لاستخدامه، يتم وضع القيم المقابلة من أجل قيم مختلفة لـــ n و i في جدول خاص (انظر الملحق رقم 1).

مثال:

احسب جملة المبلغ 600000 ل.س الذي جرى إيداعه في أحد المصارف بفائدة مركبة معدلها السنوي 8% ولمدة خمس سنوات.

الحل:

$$i = 0.08 \quad ، \quad n = 5 \quad ، \quad C = 600000$$

وبالتالي:

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$C_5 = 600000(1+0.08)^5 = 881596.86 \text{ ل.س}$$

1.1.2- حساب القيمة الحالية لمبلغ:

من قانون الفائدة المركبة الذي حصلت عليه، يمكن أن نستنتج ما يسمى القيمة الحالية (المبلغ الأصلي) لمبلغ سيتم الحصول عليه بنهاية n سنة.بهذا الخصوص نصل إلى الصيغة التالية:

$$C = C_n(1+i)^{-n} \qquad [6]$$

و يطلق عادة على المقدار $(1+i)^{-n}$ أو $\bar{u}^{n}$ معامل الخصم (أو معامل القيمة الحالية)، حيث يجري وضع القيم المقابلة من أجل قيم مختلفة لــ n و i في جدول خاص (انظر الملحق رقم 2).

2.1.3- حساب معدل الفائدة المركبة:

أيضاً يمكن استنتاج معدل الفائدة المركبة i من قانون الفائدة المركبة بالشكل التالي:

$$C_n = C(1+i)^n \Rightarrow$$

$$(1+i)^n = C_n / C \Rightarrow$$

$$1+i = \sqrt[n]{(C_n / C)}$$

$$= (C_n / C)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow$$

$$\boxed{i = (C_n / C)^{\frac{1}{n}} - 1} \qquad [7]$$

2.1.4- حساب فترة الاستثمار(عدد الدورات الزمنيةn):

و نحصل عليه بأخذ لوغاريتم طرفي قانون الفائدة المركبة، وذلك بالشكل :

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$\ln C_n = \ln C + n \ln(1+i) \Rightarrow$$

$$\boxed{n = (\ln C_n - \ln c) / \ln(1+i)} \qquad [8]$$

مثال:

أودعنا في مصرف مبلغاً من المال قدره 000 750 ل.س بفائدة مركبة معدلها 8.5% سنوياً وفي نهاية مدة ما تبين أن جملة ما تكـوّن لنـا 1039394.03 ل.س. احسب مدة إيداع ذلك المبلغ.

الحل:

لدينا

$$C = 750000$$
$$C_n = 1039394.03$$

$$i = 8.5\%$$
$$n = (\ln C_n - \ln C)/\ln(1+i)$$
$$n = (\ln(1039394.03) - \ln(750000)\ )/\ln(1+0.085))$$
$$= (13.85414844 - 13.5278285)/0.08158$$
$$= 4$$

إذاً، مدة الإيداع هي 4 سنوات.

مثال:

ما هو المبلغ الواجب دفعه الآن ليصبح رصيدك بعد ست سنوات 800000 ل.س، إذا علمت أن الفائدة مركبة ومعدلها 11%؟

الحل:

إن المبلغ المطلوب هو القيمة الحالية للرصيد المتوقع ، أي أن:

$$C_n = 800000$$
$$n \quad = 6$$

$$i = \%11$$

وبالتالي:

$$C = C_n/(1+i)^n$$

$$= 800000/(1+0.11)^6$$
$$= 427712.57 \text{ ل.س}$$

ويمكن الحل مباشرة بالتعويض في قانون الفائدة المركبة الأساسي.

مثال:

اشترط أحد الأشخاص عند موافقته على إقراض شخص آخر مبلغ 300000 ل.س أن يرد له بعد ثماني سنوات مبلغاً قدره 650000 ل.س. احسب معدل الفائدة المركبة السنوي الذي أنتج ذلك المبلغ .

الحل:

$$C = 300000$$

$$C_n = 650000$$

$$n = 8$$
$$i = (C_n / C)^{\frac{1}{n}} - 1$$
$$= (650000/300000)^{\frac{1}{8}} - 1$$
$$= 0.102 = \%10.2$$

ويمكن الحل مباشرةً بالتعويض في قانون الفائدة المركبة الأساسي.

2.2- قانون الفائدة المركبة عند إضافة الفائدة أكثر من مرة سنوياً:

وجدنا أن تطبيق قانون الفائدة المركبة الأساسي يشترط دفع إضافة الفائدة مرة واحدة سنوياً وذلك نهاية كل سنة. لكن في بعض الحالات تضاف الفائدة m مرة سنوياً، عندها يطلق على معدل الفائدة السنوي اسم معدل الفائدة الجزئي، ويصبح قانون الفائدة المركبة بالشكل:

$$C_n = c(1 + i/m)^{m \cdot n} \qquad [9]$$

وهو يعطي جملة المبلغ التي نحصل عليها من استثمار المبلغ C .بمعدل فائدة مركبة سنوي قدره i وذلك في نهاية الـــ n سنة وبحيث تضاف الفائدة m مرة سنوياً.

مثال:

أراد شخص استثمار مبلغ 50000 دولار أمريكي لمدة خمس سنوات، فكان أمامه العروض التالية:

معدل الفائدة المركبة 2.5% سنوياً وتضاف الفائدة مرة واحدة في السنة.

معدل الفائدة المركبة 2.2% سنوياً وتضاف الفائدة مرتين في السنة.

معدل الفائدة المركبة 2% سنوياً وتضاف الفائدة أربع مرات في السنة.

حدد أفضل تلك العروض بالنسبة للشخص.

الحل:

لدينا $C = 50000$

$n = 5$

$i = \%2.5 \ ، \ \%2.2 \ ، \ \%2$

$m = 1 \ ، \ 2 \ ، 4$

جملة المبلغ بالنسبة للعرض الأول:

$$C_n = 50000 \ (1 + i / m)^{m \cdot n}$$
$$= 50000(1 + 0.025)^5$$
$$= 56570.41$$ دولار أمريكي

جملة المبلغ للعرض الثاني:

$$C_n = 50000 \ (1 + 0.022 \ / 2)^{2 \cdot 5}$$
$$= 55780.39$$ دولار أمريكي

جملة المبلغ بالنسبة للعرض الثالث:

$$C_n = 50000(1+0.02/4)^{4\cdot 5}$$
$$= 55244.78 \text{ دولار أمريكي}$$

إذاً إن أفضل تلك الخيارات هو الخيار الأول. وبشكل عام إذا كنا أمام معدل فائدة موّحد، فإنه كلما ازداد عدد مرات إضافة الفائدة، كلما كانت جملة المبلغ أكبر.

مثال:

أوجد جملة المبلغ 150000 ل.س تم إيداعه لمدة ثلاث سنوات وأربعة أشهر بمعدل فائدة مركبة قدره 9 %سنوياً.

الحل:

بما أنه: $C = 150000$ $i = \%9$

فإن:

$$C_n = c(1+i)^n$$
$$= 150000(1+0.09)^{3+\frac{4}{12}}$$
$$= 150000(1+0.09)^{\frac{40}{12}}$$
$$= 199915.4 \text{ ل.س}$$

2.3- قانون الفائدة المركبة المستمرة:

عندما يجري استثمار مبلغ ما بمعدل فائدة مركبة مستمرة(تضاف الفائدة على مدار أيام سنة الاستثمارية)، فإن عدد مرات إضافة الفائدة m يــؤول إلى اللانهايــة، أي $m \to \infty$، وبالتالي فإن:

$$C_n = c(1+i/m)^{m\cdot n}$$

بأخذ النهاية لهذا التابع:

$$C_n = \lim_{m \to \infty} c(1+i/m)^{m\cdot n}$$

$$C_n = C \cdot \lim_{m \to \infty} \left[\left(1 + 1/(m/i)^{\frac{m}{i}} \right) \right]^{i \cdot n}$$

$$\boxed{C_n = C \cdot e^{i.n}} \quad [10]$$

وهي جملة المبلغ المودع بفائدة مركبة مستمرة ولمدة n سنة بمعدل فائدة سنوي i .

وتكون القيمة الحالية لمبلغ مستثمر بفائدة مستمرة ولمدة n سنة وبمعدل فائدة سنوي i هي:

$$\boxed{C = C_n / e^{i \cdot n}} \quad [11]$$

مثال:

استثمر شخص مبلغاً قدره 640000 ل.س بفائدة مركبة مستمرة ولمدة سبع سنوات. أوجد جملة المبلغ إذا علمت أن معدل الفائدة 12% سنوياً.

الحل:

بما أنه

$C = 640000$

$n = 7$

$i = \%12$

فإنّ

$$C_n = Ce^{i.n}$$

$$= 640000 \quad e^{(0.12)(7)}$$

$$= 1482474.87$$ ل.س

مثال:

استثمر شخص مبلغ 75000 ل.س بفائدة مركبة خلال سنتين بمعدل للفائدة شهري قدره 8% والمطلوب حساب الفائدة التي حققها المبلغ المذكور في نهاية فترة الاستثمار.

الحل:

بما أنّ :

$n = 2$ ، $C = 75000$ ، $i = \%8$ (شهري)

و حيث أنّ معدل الفائدة شهري فيجب أن تتجانس معه الفترة الزمنية.لذلك فإنه عند التعويض في القانون نضع $n = 24$ ، أي:

$$C_n = C(1+i)^n$$

$$C_2 = 75000(1+0.08)^{24}$$

$$= 475588.56$$ ل.س

وتكون الفائدة I :

$$I = C_2 - C = 400588.56$$ ل.س

2.4- الزمن اللازم لمضاعفة المبلغ الأصلي:

وهو عدد الدورات الزمنية التي يمكن أن تؤدي إلى مضاعفة مبلغ أصلي C عدداً من المرات قدره d .

من أجل إيجاد ذلك سننطلق من قانون الفائدة المركبة الأساسي:

$$C_n = C(1+i)^n$$

للوصول بالمبلغ الأصلي C إلى جملة مبلغ $C_n = d \cdot C$، نكتب:

$$d \cdot C = C(1+i)^n$$

$$d = (1+i)^n$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$\ln d = n \ln(1+i)$$

$$\boxed{n = \ln d / \ln(1+i)} \qquad [12]$$

مثال:

احسب المدة الواجب أن يستثمر فيها شخص مبلغ 500000 ل.س حتى يحصل على ثلاثة أضعاف المبلغ في مصرف يتعامل بمعدل فائدة مركبة سنوي قدره %9.

الحل:

بما أن.

$$C = 500000$$

$$i = \%9$$

$$d = 3$$

فيمكن أن نكتب:

$$\begin{aligned} n &= \ln d / \ln(1+i) \\ &= \ln(3) / \ln(1+0.09) \\ &= 1.098612289 / 0.086177696 = 12.748 \end{aligned}$$

أي 12 سنة بالإضافة إلى 0.748 من السنة، أي:

$0.748 \times 360 = 269.28$ يوم

وبالتالي:

$$269.28/30 = 8.976$$ شهر

$$0.976 \times 30 = 29.28$$ يوم

أي12 سنة و8 أشهر و29 يوماً.

2.5– معدل الفائدة السنوي الاسمي (أو الجزئي): nominal interest rate

وهو الفائدة المستحقة عن مبلغ مستثمر قدره مئة وحدة نقدية في نهاية السنة، عندما يكون معطى معدل الفائدة عن جزء من السنة، وبالتالي فإن هذا المعدل يكـــون مساوياً إلى جداء معدل الفائدة عن جزء من السنة بعدد المرات التي تضاف فيها الفائدة سنوياً.

مثال:

إذا كان معلوماً أن مبلغاً ما مستثمر بمعدل فائدة مركبة 3.5% عن كل أربعة أشهر، فأوجد معدل الفائدة الاسمي السنوي:

الحل:

إن عدد مرات إضافة الفائدة سنوياً في هـــذا المثـــال هـــو ثـــلاث مـــرات $(m = 12/4)$ و بالتالي إذا رمزنا لمعدل الفائدة الاسمي السنوي بـــ i_* فإنّ:

$$i_* = (0.035)(3) = 0.105 = \%10.5$$

عندها نقول بأن ذلك المبلغ مستثمر بمعدل فائدة مركبة 10.5% سنوياً وأن الفائدة تضاف ثلاث مرات سنوياً.

مثال:

أوجد معدل الفائدة الاسمي السنوي للمثال السابق إذا كان معدل الفائدة المركبة معطى عن كل ستة أشهر.

الحل:

بما أن عدد مرات إضافة الفائدة هو مرتان فإن:

$$i_* = (0.035)(2) = 0.070 = \%7$$

وهنا نقول بأن ذلك المبلغ مستثمر بمعدل فائدة مركبة 7% وأن الفائدة تضاف مرتين سنوياً.

2.6- معدل الفائدة السنوي الحقيقي: Effective Interest Rate

وهو الفائدة المستحقة عن مبلغ مستثمر قدره مئة وحدة نقدية، ولا تضاف إلى المبلغ إلا في نهاية كل دورة زمنية تساوي السنة.

إذاً، إن معدل الفائدة المركبة السنوي 5% ، حيث تضاف الفائدة إلى المبلغ الأصلي فقط في نهاية كل سنة، هو معدل فائدة سنوي حقيقي i . وبالطبع إن هذا المعدل للفائدة يختلف عن معدل الفائدة السنوي الاسمي i_* ، ولا يساويه إلا عندما يكون عدد مرات إضافة الفائدة إلى المبلغ الأصلي هو مرة واحدة فقط $(m = 1)$.

مما سبق نستطيع التمييز بين معدل الفائدة الحقيقي ، ومعدل الفائدة الاسمي على النحو التالي:

عندما نقول بأن مبلغاً استثمر بمعدل فائدة مركبة سنوي 9% وأن الفائدة تضاف مرة واحدة كل سنة(نهاية السنة)، فيكون المقصود هنا أنه لدينا معدل فائدة مركبة سنوي حقيقي i .

عندما نقول بأن مبلغاً استثمر بمعدل فائدة مركبة سنوي 9% ، وأن الفائدة تضاف أكثر من مرة في السنة (كل شهر، كل شهرين، كل ثلاثة أشهر،.....) فيكون المقصود أن معدل الفائدة 9% هو معدل فائدة مركبة سنوي اسمي i_* .

2.6.1– معدل الفائدة السنوي الحقيقي بدلالة معدل الفائدة السنوي الاسمي:

إن القيمة المستقبلية للمبلغ الحالي C بعد سنة واحدة بمعدل فائـــدة مركبـــة سنوي اسمي i_* (حيث تضاف الفائدة m مرة في السنة) وبمعدل فائدة مركبة سنوي حقيقي i تعطى بالشكل:

$$C_n = C(1+i_*/m)^m = C(1+i) \Rightarrow$$

$$(1+i_*/m)^m = 1+i \Rightarrow$$

$$\boxed{i = (1+i_*/m)^m - 1} \qquad [13]$$

وهو معدل الفائدة المركبة السنوي الحقيقي بدلالة معدل الفائدة المركبة السنوي الاسمي، حيث i_*/m هو معدل الفائدة المركبة الجزئي .

مثال:

أوجد معدل الفائدة المركبة السنوي الحقيقي، إذا كانت الفائدة تضاف كل ثلاثة أشهر وبمعدل فائدة مركبة سنوي اسمي قدره 5%.

الحل:

بما أن $i_* = \%5$

$$m = 12/3 = 4$$

$$i = (1+i_*/m)^m - 1$$
$$= (1+0.05/4)^4 - 1$$
$$= 0.0509 = \%5.09$$

مثال:

كرر الطلب الوارد في المثال السابق إذا كانت الفائدة تضاف كل أربعة أشهر.

الحل:

بما أن:

$$i_* = \%5$$
$$m = 12/4 = 3$$

فإنّ:

$$i = (1 + 0.05/3)^3 - 1$$
$$= 0.0508 = \%5.08$$

مثال:

كرر الطلب الوارد في المثال السابق إذا كانت الفائدة تضاف كل ستة أشهر.

الحل:

بما أنّ:

$$i_* = \%5$$
$$m = 12/6 = 2$$

فإن:

$$i = (1 + 0.05/2)^2 - 1$$
$$= 0.0506 = \%5.06$$

من خلال الأمثلة السابقة نستنتج أنه كلما زاد عدد مرات إضافة الفائدة سنوياً كلما مال الفرق بين معدل الفائدة الاسمي و معدل الفائدة الحقيقي إلى الارتفاع ولصالح الأخير.

2.6.2– معدل الفائدة السنوي الاسمي بدلالة معدل الفائدة السنوي الحقيقي:

إذا انطلقنا من جملة المبلغ C_n باستخدام معدل الفائدة المركبة الاسمي i_*، وبعلاقتها بالجملة باستخدام معدل الفائدة الحقيقي i، يكون:

$$C_n = C(1 + i_*/m)^m = C(1+i) \Rightarrow$$

$$(1+i_*/m)^m = 1+i \Rightarrow$$

$$1+i_*/m = (1+i)^{\frac{1}{m}}$$

$$i_*/m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

$$\boxed{i_* = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]} \qquad [14]$$

القانون الذي حصلنا عليه أخيراً يعطي معدل الفائدة المركبة السنوي الاسمي i_* بدلالة الفائدة المركبة السنوي الحقيقي i، فيما لو أضيفت الفائدة m مرة في السنة.

مثال:

أودع شخص مبلغ 000 900 ل.س في أحد المصارف بمعدل فائدة مركبة سنوي حقيقي 8.5% . أوجد معدل الفائدة الاسمي السنوي في الحالات التالية:

1- تضاف الفائدة كل ستة أشهر.

2- تضاف الفائدة كل أربعة أشهر.

3- تضاف الفائدة كل ثلاثة أشهر.

4- تضاف الفائدة كل شهر.

الحل:

في الحالة الأولى و بما أنه:

$$C = 900000$$

$$i = \%8.5$$

فيمكننا أن نكتب:

$$i_* = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

وبالتالي فإن معدل الفائدة الاسمي يكون:

$$m = 12/6 = 2 \Rightarrow i_* = 2\left[(1+0.085)^{\frac{1}{2}} - 1\right]$$

$$= 0.08327 = \%8.327$$

في الحالة الثانية:

$$m = 12/4 = 3 \Rightarrow i_* = 3\left[(1+0.085)^{\frac{1}{3}} - 1\right]$$

$$= 0.0827 = \%8.27$$

في الحالة الثالثة:

$$m = 12/3 = 4 \Rightarrow i_* = 4\left[(1+0.085)^{\frac{1}{4}} - 1\right]$$

$$= 0.0824 = \%8.24$$

في الحالة الرابعة:

$$m = 12/1 = 12 \Rightarrow i_* = 12\left[(1+0.085)^{\frac{1}{12}} - 1\right]$$

$$= 0.0819 = \%8.19$$

إذاً ، يمكن الاستنتاج بأنه كلما ازداد عدد مرات إضافة الفائدة في السنة (وفي ظل معدل فائدة مركبة سنوي حقيقي ثابت) كلما انخفض معدل الفائدة المركبة السنوي الاسمي.

مثال:

استثمر سند بمعدل فائدة مركبة حقيقي سنوي 8%. احسب معدل الفائدة المركبة ربع السنوي المكافئ لذلك المعدل.

الحل:

بما أنّ. $i = \%8$

ومعدل الفائدة المكافئ المطلوب هو ربع سنوي، فهذا يعني أن عـــدد مـــرات إضافة الفائدة المقابل هو $m = 12/3 = 4$. وبالتالي فإن معدل الفائدة المركبة الـــسنوي الاسمي هو:

$$i_* = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

$$= 4\left[(1+0.08)^{\frac{1}{4}} - 1\right]$$

$$= 0.078 = \%7.8$$

ويكون معدل الفائدة المركبة الشهري:

$$i_* / 4 = 0.0195 = \%1.95$$

2.7– تمارين غير محلولة

1– إذا علمت أن معدل الفائدة السنوي المركبة تساوي 5% أوجد جملة مبلغ 900000 ل.س مستثمر لمدة أربع سنوات .

2– في 22/5/2001 أودع في أحد المصارف مبلغ قدره 1500000 ل.س بفائدة مركبة قدرها 4.5% ، في أي تاريخ يجب سحب المبلغ مضاعفاً ؟

3– أراد أحد الأشخاص أن يستثمر مبلغاً ما في أحد المصارف الذي يعطي معدلاً للفائدة المركبة السنوية قدرها 11%، و ذلك لكي يدفع بعد عشر سنوات (من تاريخ استثماره للمبلغ) مصاريف زواج ولده الوحيد و التي قدرها بـــ مليون ليرة سورية .

أوجد ذلك المبلغ ؟

4– بعد خمس سنوات من إيداعك في أحد المصارف مبلغاً قدره 100000 ل.س أصبح المبلغ المودع يساوي 225000 ل.س ، احسب معدل الفائدة المركبة السنوية التي يعمل بها هذا المصرف .

5– تم استثمار700000 ل.س لمدة سنة واحدة فقط ، و ذلك في أحد المصارف إذا علمت أن :

أ– معدل الفائدة المركبة 5% سنوياً

ب– معدل الفائدة المركبة 4% سنوياً و تضاف الفائدة مرتين في السنة

جـــ– معدل الفائدة المركبة 3.8% سنوياً ، و تضاف الفائدة أربع مرات في السنة.

د– معدل الفائدة المركبة 3.5% سنوياً ، و تضاف الفائدة ست مرات في السنة.

و– معدل الفائدة المركبة 1% سنوياً، و تضاف الفائدة اثنتي عشرة مرة في السنة. برأيك أي الاستثمارات أفضل بالنسبة للمصرف ؟

6- احسب جملة مبلغ قدره 200000 أودع لفترة قدرها أربع سنوات و ثلاثة أشهر و ذلك عند فائدة سنوية مركبة 6%.

7- احسب جملة المبلغ نفسه في التمرين الأول إذا علمت أن معدل الفائدة مركبة مستمرة .

8- كان أحد الأشخاص المتعاملين مع أحد المصارف يستلم كل سنة (في تاريخ محدد) من المصرف مبلغ الفائدة التي يحققها مبلغه الذي أودعه في ذلك المصرف، إذا علمت أن مبلغه المستثمر في هذا المصرف هو 800000 $ و إذا علمت أن هذا المصرف يتعامل بمعدل فائدة مركبة قدرها 5.5 % سنوياً ، و تضاف الفائدة مرتين في السنة. أوجد المبلغ الذي يستلمه هذا الشخص في كل سنة .

9- أراد أحد المستثمرين مضاعفة المبلغ الموجود لديه، و ذلك في إيداعه في أحد المصارف إذا علمت أن المصرف يتعامل بفائدة مركبة سنوية قدرها 12% و أن المبلغ المراد استثماره 2500000 ل.س ، أوجد الفترة الزمنية اللازمة لذلك و بشكل دقيق

.10- إذا علمت أن الفائدة تضاف كل ستة أشهر و بمعدل فائدة مركبة سنوي اسمي قدره 7% . احسب معدل الفائدة المركبة السنوي الحقيقي .

11- أعد المثال السابق إذا كانت الفائدة تضاف كل ثلاثة أشهر و كل أربعة أشهر ، ماذا تستنتج ؟

12- إذا علمت أن أحد المصارف يتعامل بمعدل فائدة مركبة سنوي حقيقي 10 %، أوجد معدل الفائدة الاسمي السنوي و ذلك عند : (لمبلغ قدره مليون ليرة سورية)

أ- إضافة الفائدة كل شهر

ب- إضافة الفائدة كل شهرين

ب- إضافة الفائدة كل شهرين

جـ- إضافة الفائدة كل ثلاثة أشهر

د- إضافة الفائدة كل أربعة أشهر

و- إضافة الفائدة كل ستة أشهر

ماذا تستنتج ؟

13- استثمر مبلغ 300000 ل.س لمدة تسعة أشهر بمعدل فائدة نصف سنوي قدره 6 % . احسب الفائدة من هذا المبلغ إذا كان الاستثمار بالفائدة البسيطة أولاً و بالفائدة المركبة ثانياً ، ماذا تستنتج ؟

14- في بداية عام 2008 تستحق 800000 ل.س الأداء لأحد الأشخاص بعد ما أودع مبلغ من المال في بداية عام 2000 ، احسب ذلك المبلغ المودع في عام 2000 و ذلك إذا تم استثمار هذا المبلغ وفق الفائدة البسيطة أولاً و وفق الفائدة المركبة ثانياً (معدل الفائدة السنوي المستخدم في الحالتين هو 10 %) ماذا تستنتج ؟

الفصل الثالث

الدفعات الدورية

3.1- تذكير ببعض المفاهيم الأساسية

3.2- القيمة الحالية للدفعات الدورية السنوية.

3.3 القيمة الحالية للدفعات الدورية الجزئية

3.4- القيمة المستقبلية للدفعات الدورية السنوية

3.5- القيمة المستقبلية للدفعات الدورية الجزئية

3.6- تمارين غير محلولة

الفصل الثالث

الدفعات الدورية

3.1- تذكيرة ببعض المفاهيم الأساسية:

1- الدفعات الدورية: هي الدفعات التي يتم تسديدها بشكل منتظم وبقيم متساوية وعبر فترات زمنية متساوية قد تكون شهرية أو ربع سنوية أو نصف سنوية أو سنوية.

2- الدفعات العادية: وهي الدفعات التي يجري سداد كل منها في نهاية الفترة الزمنية (نهاية السنة بالنسبة للدفعات السنوية، نهاية الشهر بالنسبة للدفعات الشهرية، وهكذا...).

3- الدفعات الفورية: وهي الدفعات التي يجري سداد كل منها في بداية الفترة الزمنية (بداية السنة بالنسبة للدفعات السنوية، بداية الشهر بالنسبة للدفعات الشهرية، وهكذا....).

4- الدفعات الجزئية: وهي الدفعات التي تتم عبر فترات زمنية متساوية كل منها أقل من السنة (فإذا كانت كل شهر، فهي دفعات جزئية شهرية. وإذا كانت كل ستة أشهر، فهي دفعات جزئية نصف سنوية، وهكذا..

5- الدفعات العاجلة: وهي الدفعات التي يبدأ أولها في أول دورة زمنية من بدء الاستثمار، فإذا كان لدينا دفعات سنوية عادية عاجلة، فهذا يعني أن الدفعة الأولى منها تبدأ في نهاية أول سنة من الاستثمار أو الإقرض. أما إذا كان لدينا دفعات سنوية فورية عاجلة، فهذا يعني أن الدفعة الأولى منها تبدأ أول السنة الأولى من بدء الاستثمار أو الإقراض.

6- الدفعات المؤجلة: وهي الدفعات التي يبدأ أولها بعد عدد معين من الدورات الزمنية التالية لبدء الاستثمار أو الإقراض، وذلك سواء أكانت دفعات عادية أم فورية.

فإذا كنا أمام دفعات عادية مؤجلة ثلاث سنوات فهذا يعني أن الدفعة الأولى تبـدأ في نهاية السنة الرابعة من بدء الاستثمار أو الإقراض.

في حين إذا كنا أمام دفعات فورية مؤجلة ثلاث سنوات، فهذا يعني أن الدفعة الأولى تبدأ في بداية السنة الرابعة التالية لبدء الاستثمار أو الإقراض.

7- الدفعات المؤقتة: وهي الدفعات التي يكون عددها محدوداً بعـدد معـين مـن الدفعات، وذلك مهما كان نوعها عادية أم فورية، عاجلة أم مؤجلة، سنوية أم جزئية.

8- الدفعات الدائمة: وهي الدفعات التي عددها غير محدود، وبالتالي تكون مستمرة عبر الزمن وإلى مالا نهاية مثل الجوائز وريع الأرض. إذ كما سنجد لاحقـاً، أن لهـذا النوع من الدفعات أهمية كبيرة عند التأمين لمدى الحياة.

3.2- القيمة الحالية للدفعات الدورية السنوية :

3.2.1- القيمة الحالية للدفعات الدورية السنوية العادية :

1- القيمة الحالية لـ n دفعة دورية سنوية عادية عاجلة:

من أجل n دفعة دورية سنوية قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة، تـستحق الأولى منها في نهاية السنة الأولى اعتباراً من بدء الزمن، وتستحق الثانية في نهاية الـسنة الثانية اعتباراً من بدء الزمن، وهكذا تتوالى بقية الدفعات.

بافتراض أن i هو معدل الفائدة المركبة السنوي الذي يعتمد أساساً لحـساب القيمة الحالية، وبالتالي فإذا كان $u=1+i$، ورمزنا بـ $a_{\overline{n}|i}$ إلى القيمـة الحالية لتلك الدفعات، فتكون :

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الأولى: u^{-1}

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الثانية: u^{-2}

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الثالثة: u^{-3}

وهكذا فإن القيمة الحالية للدفعة ما قبل الأخيرة: $u^{-(n-1)}$

أما القيمة الحالية للدفعة الأخيرة: u^{-n}

بناء على ذلك، تكون القيمة الحالية في بدء الزمن لتلك الدفعات مجتمعة هي:

$$a_{\overline{n}|i} = u^{-1} + u^{-2} + u^{-3} + \ldots + u^{-(n-1)} + u^{-n}$$

وهي حدود متوالية هندسية حدها الأول هو u^{-1} وحدها الأخير هو u^{-n} أما أساسها هو u^{-1}. ونعلم أن مجموع حدود متوالية هندسية يعطى بالصيغة:

$$s_n = \frac{I_1 - rI_n}{1-r} \qquad [1]$$

حيث:

I_1 - الحد الأول للمتوالية.

I_n - الحد الأخير للمتوالية.

r - أساس المتوالية.

وبالتعويض في هذا القانون نجد أن:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{u^{-1} - u^{-1} \cdot u^{-n}}{1-u^{-1}} = \frac{u^{-1}\left(1-u^{-n}\right)}{1-u^{-1}}$$

نضرب البسط والمقام بالمقدار u^{+1} ⇐

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{u^{+1} \cdot u^{-1}\left(1-u^{-n}\right)}{u - u^{+1}u^{-1}} = \frac{1-u^{-n}}{u-1}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-u^{-n}}{i} \qquad [2]$$

وهو قانون القيمة الحالية لـ n دفعة دورية سنوية عادية عاجلة قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة.

من أجل n دفعة دورية سنوية عادية عاجلة قيمة كل منها c وحدة نقدية، تكون القيمة الحالية لها مساوية إلى:

$$c \cdot a_{\overline{n|}\,i} = c\left(\frac{1-u^{-n}}{i}\right) \qquad [3]$$

مثال:

أحسب القيمة الحالية لست دفعات دورية سنوية قيمة كل منها تسعة آلاف ل.س، تستحق الأولى في نهاية السنة الأولى من الآن، والثانية في نهاية السنة الثانية وهكذا... مع العلم أن معدل الفائدة المركبة السنوي هو 8%.

الحل:

يمكن تمثيل الدفعات على محور الزمن التالي:

0	1	2	3	4	5	6
	9000	9000	9000	9000	9000	9000

لدينا $c = 9000$ فيكون المطلوب هو:

$n = 6$
$i = 0,08$

$$c \cdot a_{\overline{n|}\,i} = 9000\, a_{\overline{6|}\,0.08}$$

$$9000\, a_{\overline{6|}\,0.08} = 9000\left(\frac{1-u^{-n}}{i}\right)$$

$$= 9000\left(\frac{1-v^{n}}{i}\right) = 9000\left(\frac{1-\frac{1}{(1+0,08)^6}}{}\right.$$

$$= 9000\left(\frac{1-(1+0.08)^{-6}}{0.08}\right)$$

$$= 9000\,(4.622879664)$$

$$= 41605.917 \quad \text{ل.س}$$

مثال:

في صياغة أخرى للمثال السابق، إذا كانت القيمة الحالية لـدفعات دورية سنوية قيمة كل منها تسعة آلاف ل.س هي **41605.917** ل.س.

أوجد عدد تلك الدفعات إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة السنوي هو %8.

الحل:

ننطلق من القانون:

$$9000 \cdot a_{\overline{n}|\,i} = 9000\left(\frac{1-u^{-n}}{i}\right)$$

$$41605.917 = 9000\left(\frac{1-(1+0.08)^{-n}}{0.08}\right)$$

$$4.622879667 = \frac{1-(1+0.08)^{-n}}{0.08}$$

$$1-(1+0.08)^{-n} = 0.369830373$$

$$(1.08)^{-n} = 0.360169626$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين $\Leftarrow$

0,360169626

$$-n \cdot Ln(1.08) = Ln(0.630169626)$$

$$n = \frac{-Ln(0.630169626)}{Ln(1.08)}$$

$$n = \frac{-(-0.461766248)}{0.076961041}$$

$$n = 6$$

إذاً، عدد الدفعات هو ست، وكل منها 9000 ل.س .

2-القيمة الحالية لـــ n دفعة دورية سنوية عادية مؤجّلة:

بافتراض أن تنفيذ الدفعة الأولى من الـــ n دفعة دورية سنوية عادية والـــتي قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة سيتم بعد انقضاء m سنة ويتم التسديد في نهايـــة السنة التالية $m + 1$ ، أي أن الدفعات عادية ولها فترة سماح قدرها m سنة .

للوصول إلى القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعات السابقة التي سنرمز لها بالرمز ${}_{m|}a_{\overline{n|}\,i}$ ، نوجد أولاً القيمة الحالية لتلك الدفعات في اللحظة m :

$$a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-u^{-n}}{i}$$

وهي عبارة عن القيمة الحالية في اللحظة m لـــ n دفعة دورية سنوية عادية، محسوبة على أساس معدل فائدة مركبة سنوي i . وهي بذلك تعتبر قيمة مـــستقبلية (أو جملة مبلغ) قيمتها الحالية في بدء الزمن هي ${}_{m|}a_{\overline{n|}\,i}$. إذاً، وفق قـــانون الفائـــدة المركبة يكون لدينا:

$$\frac{1-u^{-n}}{i} = {}_{m|}a_{\overline{n|}\,i}\,(1+i)^m \Rightarrow$$

$${}_{m|}a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-u^{-n}}{i} \Big/ (1+i)^m$$

$${}_{m|}a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-u^{-n}}{i}(1+i)^{-m}$$

$$\boxed{{}_{m|}a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-u^{-n}}{i}u^{-m}} \qquad [4]$$

وهي القيمة الحالية في بدء الزمن لـــ n دفعة دورية سنوية عادية قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة، مؤجلة بمقدار m سنة وتحسب القيمة الحالية على أساس معدل فائدة مركبة سنوي قدره i.

ويمكن أيضاً التعبير عن ذلك بالعلاقة مع القيمة الحاليـــة للـــدفعات العاديـــة العاجلة بالشكل:

$$ {}_{m|}a_{\overline{n}|\, i} = a_{\overline{n}|\, i}\, u^{-m} \qquad [5] $$

وبالتالي، من أجل قيمة للدفعة الواحدة c وحدة نقدية يكون لدينا:

$$ c \cdot {}_{m|}a_{\overline{n}|\, i} = c \cdot a_{\overline{n}|\, i} \cdot u^{-m} $$

وهنا نشير إلى أنه، عندما نقول لدينا دفعات دورية سنوية عادية تبدأ بعد أربع سنوات من بدء الزمن، هذا يعني أن الدفعات مؤجلة ثـــلاث ســـنوات ($m + 1$)، حيث تنفذ الدفعة الأولى آخر السنة الرابعة.

وعندما نقول إنه لدينا دفعات دورية سنوية عادية مؤجلة خمس سنوات، فهذا يعني أن m=5 وأن الدفعة الأولى تنفذ نهاية السنة السادسة اعتباراً من بدء الزمن.

مثال:

قدّم المصرف الزراعي التعاوني عرضاً لتمويل أحد المشاريع الزراعية في بداية العام 2005م، على أن يبدأ العميل التسديد على 12 دفعة دورية سنوية عادية تبدأ الأولى منها بعد مرور ثلاث سنوات مباشرة من تاريخ منح القرض.

أوجد القيمة الحالية في تاريخ منح القرض، لتلك الدفعات إذا علمت أن قيمة الدفعة الواحدة 800000 ل.س ومعدل الفائدة المركبة السنوي المعمول عليـــه هـــو 8%.

الحل:

بما أن. $i = 8\%, \quad n = 12, \quad c = 800000$

والدفعات دورية سنوية عادية، هذا يعني أن $m = 2$ والدفعة الأولى تبدأ في نهاية السنة الثالثة، وبالتالي فإن القيمة الحالية للدفعات يعطينا إياها القانون:

$$c\cdot_{m|}a_{\overline{n|}\,i} = c\cdot\left(\frac{1-u^{-n}}{i}\right)\cdot u^{-m} \Rightarrow$$

$$800000_{2|}a_{\overline{12|}\,0.08} = 800000\left(\frac{1-(1.08)^{-12}}{0.08}\right)(1.08)^{-2}$$

$$= 800000\left(\frac{1-(1.08)^{-12}}{0.08}\right)(1.08)^{-2}$$

$$= 800000(7.536078)(0.8573388)$$

$$= 5168777.778 \quad \text{ل.س}$$

3- القيمة الحالية لدفعات دورية سنوية عادية عاجلة دائمة:

سبق وعرّفنا الدفعات الدائمة، بأنها دفعات مستمرة إلى مالا نهاية، فإذا كانت هذه الدفعات الدائمة دورية سنوية قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة عادية ، وتنفذ الأولى منها في بدء الزمن (تاريخ بدء الاستثمار أو الحصول على القرض) ، وفي ظل معدل فائدة مركبة سنوي i ، فإن القيمة الحالية لتلك الدفعات a_i ، ما هي إلّا القيمة الحالية لدفعات دورية سنوية عادية عاجلة عندما ينتهي عدد الدفعات n إلى مالا نهاية، أي:

$$a_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-u^{-n}}{i}$$

$$a_i = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-u^{-n}}{i}\right)$$

$$a_i = \frac{1-u^{-\infty}}{i} = \frac{1-\frac{1}{u^{\infty}}}{i} = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{i}$$

$$a_i = \frac{1-0}{i}$$

$$\boxed{a_i = \frac{1}{i}} \qquad [6]$$

وهي القيمة الحالية في بدء الزمن لدفعات دورية سنوية عادية عاجلة قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة ، وتستمر الدفعات إلى مالا نهاية.ومن أجل قيمة C وحدة نقدية لكل دفعة ⇐

$$c \cdot a_i = \frac{c}{i}$$

مثال:

اشترى والد أحد التلاميذ لولده عندما دخل الجامعة شهادة استثمار تعطيه دخلاً سنوياً منتظماً مقداره 72000 ل.س، على أن تبدأ الدفعة الأولى بعد سنة من بدء دراسته . فإذا علمت أن معدل الفائدة المركبة السنوي المصدرة على أساس تلك الشهادة هو 8%، أوجد القيمة الحالية لتلك الشهادة.

الحل:

بما أن. c=72000 , i =%8

والدفعة الأولى ستنفّذ بعد سنة من بدء الزمن (من تاريخ شراء الشهادة) فهذا يعني أن الدفعات التي سيتلقّاها التلميذ هي دفعات دورية سنوية عادية، وبما أنه لم يحدد عدد الدفعات فهي دفعات دائمة، لذلك فإن القيمة الحالية لتلك الدفعات هي $c \cdot a_i$ ، أي:

$$c \cdot a_i = \frac{c}{i} \Rightarrow$$

$$72000 \quad a_{0.08} = \frac{72000}{0.08} = 900000 \quad \text{ل.س}$$

4- القيمة الحالية لدفعات عادية مؤجلة دائمة:

ما هي إلّا القيمة الحالية لدفعات عادية مؤجلة بمقدار m سنة ، والتي سبق ورمزنا لها بالرمز ${}_{m|}a_{\overline{n}|\,i}$ ، حيث: ${}_{m|}a_{\overline{n}|\,i} = \frac{1-u^{-n}}{i}u^{-m}$ عندما ينتهي عدد الدفعات n إلى ما لانهاية.

فإذا رمزنا للقيمة الحالية لدفعات عادية مؤجلة دائمة بـ ${}_{m|}a_i$ فيكون:

$$\begin{aligned} {}_{m|}a_i &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-u^{-n}}{i} \cdot u^{-m} \\ &= \frac{1-u^{-\infty}}{i} \cdot u^{-m} = \frac{1-\frac{1}{u^{\infty}}}{i} u^{-m} \\ &= \frac{1-\frac{1}{\infty}}{i} u^{-m} = \frac{1-0}{i} u^{-m} \end{aligned}$$

$$\boxed{{}_{m|}a_i = \frac{u^{-m}}{i}} \quad [7]$$

وهي القيمة الحالية في بدء الزمن لدفعات عادية مؤجلة m سنة وقيمة كل منها وحدة نقدية واحدة وهي دفعات مستمرة إلى مالا نهاية.

ويمكن أن نكتب القيمة الحالية ${}_{m|}a_i$ بدلالة القيمة الحالية للدفعات العادية العاجلة الدائمة a_i وذلك بالشكل:

$$\boxed{{}_{m|}a_i = a_i \cdot u^{-m}} \quad [8]$$

مثال:

لو عدنا إلى المثال السابق وافترضنا أنه يتم البدء بالدفعات بعد خمس سنوات من تاريخ إصدار الشهادة. أوجد القيمة الحالية للشهادة.

الحل:

لدينا هنا $m = 4$

حيث الدفعة الأولى تبدأ في نهاية السنة الخامسة اعتباراً من تـــاريخ إصـــدار الشهادة، وبالتالي يكون:

$$c\cdot_{m|}a_i = c\cdot\frac{u^{-m}}{i}$$

$$72000_{4|}a_{0.08} = 72000\frac{(1.08)^{-4}}{0.08} = 661526.868 \text{ ل.س}$$

3.2.2- القيمة الحالية للدفعات الدورية السنوية الفورية:

1- القيمة الحالية لـــ n دفعة فورية عاجلة:

إذا رمزنا بـــ $\overset{\partial}{\overline{n}|}{}^{i}$ للقيمة الحالية في بدء الزمن لـــ n دفعة دورية ســـنوية قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة، تستحق الأولى في بدء الزمن والثانية في بداية السنة الثانية من بدء الزمن وهكذا... وبمعدل فائدة مركبة سنوي i، فيمكن الحصول على الصيغة التي تعطي تلك القيمة الحالية بالشكل التالي:

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الأولى تساوي الواحد الصحيح، نظراً لكونها ستدفع في اللحظة نفسها .

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الثانية هي $(1+i)^{-1} = u^{-1}$

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الثالثة هي u^{-2}

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الرابعة هي u^{-3}

....

وهكذا فإن القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة ما قبل الأخيرة هي u^{-n+2}

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الأخيرة هي u^{-n+1}

فتكون القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعات مجتمعة هي:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = 1 + u^{-1} + u^{-2} + \ldots + u^{-n+2} + u^{-n+1}$$

وهي حدود متوالية هندسية حدّها الأول 1 وأساسها u^{-1} وحدها الأخير u^{-n+1}.

وبالاعتماد على قانون مجموع حدود متوالية هندسية، يمكن أن نكتب:

$$S_n = \ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-u^{-1}\cdot u^{-n+1}}{1-u^{-1}}$$

$$= \frac{1-u^{-n}}{1-u^{-1}}$$

نضرب البسط والمقام بـــ $u^{+1} \Leftarrow$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = \frac{u(1-u^{-n})}{u-u\cdot u^{-1}} = \frac{u(1-u^{-n})}{u-1}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-u^{-n}}{i}\cdot u} \qquad [9]$$

وهي القيمة الحالية في بدء الزمن لــ n دفعة دورية سنوية فورية عاجلة قيمـــة كل منها وحدة نقدية واحدة.

ويمكن التعبير عن تلك القيمة الحالية بدلالة القيمة الحالية للدفعات العادية بالشكل:

$$\boxed{\ddot{a}_{\overline{n|}\,i} = a_{\overline{n|}\,i}\cdot u} \qquad [10]$$

مثال:

احسب القيمة الحالية لسبع دفعات دورية سنوية قيمة كل منها خمسة آلاف ل.س، تستحق الأولى في بدء الزمن، والثانية في بداية السنة الثانية اعتباراً من بدء الزمن وهكذا... مع العلم أن معدل الفائدة المركبة السنوي هو 6.5%.

الحل:

باعتبار أن $c=5000$ ، $n=7$ ، $i=\%6.5$ وكون أول دفعة تنفّذ في بدء الزمن، فالدفعات فورية، إذاً فالقيمة الحالية لتلك الدفعات هي:

$$c\,\partial_{\overline{n}|\,i} = \frac{1-u^{-n}}{i}\cdot u$$

$$5000\,\partial_{\overline{7}|\,0.065} = 5000\left[\frac{1-(1.065)^{-7}}{0.065}(1.065)\right]$$

$$= 5000[5.841014]$$

$$= 29205.0678 \quad \text{ل.س}$$

2- القيمة الحالية لـ n دفعة فورية مؤجلة:

إذا رمزنا بـ $_{m|}\partial_{\overline{n}|\,i}$ للقيمة الحالية في بدء الزمن لـ n دفعة دورية سنوية قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة، يبدأ تنفيذ الدفعة الأولى بعد انقضاء m سنة مباشرة من بدء الزمن ومعدل الفائدة المعمول فيه هو i .

للوصول إلى القيمة الحالية في بدء الزمن لـ n دفعة الفورية المؤجلة السابقة، نوجد أولاً القيمة الحالية في اللحظة m لتلك الدفعات والتي هي $\partial_{\overline{n}|\,i}$:

$$\partial_{\overline{n}|\,i} = \frac{1-u^{-n}}{i}u$$

وهذه تعتبر جملة مبلغ قيمته الحالية في بدء الزمن هي:

$$_{m|}\partial_{\overline{n|}\,i}$$

إذاً ، وفق قانون الفائدة المركبة يكون لدينا:

$$\partial_{\overline{n|}\,i} = {}_{m|}\partial_{\overline{n|}\,i}(1+i)^m = {}_{m|}\partial_{\overline{n|}\,i}\cdot u^m$$

$$_{m|}\partial_{\overline{n|}\,i} = \frac{\partial_{\overline{n|}\,i}}{u^m} = \partial_{\overline{n|}\,i}\cdot u^{-m}$$

$$_{m|}\partial_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-u^{-n}}{i}u\cdot u^{-m}$$

$$_{m|}\partial_{\overline{n|}\,i} = \frac{1-u^{-n}}{i}u^{-m+1} \qquad [11]$$

وهي القيمة الحالية في بدء الزمن لـــ n دفعة دورية سنوية فورية قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة مؤجلة بمقدار m سنة ، وتحسب القيمة الحالية على أساس معدل فائدة مركبة سنوي قدره i .

ويمكن التعبير أيضاً عن تلك القيمة، بالعلاقة مع القيمة الحالية للدفعات الفورية العاجلة بالشكل:

$$_{m|}\partial_{\overline{n|}\,i} = \partial_{\overline{n|}\,i}\cdot u^{-m} \qquad [12]$$

وبالعلاقة مع القيمة الحالية للدفعات العادية العاجلة:

$$_{m|}\partial_{\overline{n|}\,i} = a_{\overline{n|}\,i}\cdot u^{-m+1} \qquad [13]$$

وبالتالي، من أجل قيمة للدفعة الواحدة C وحدة نقدية، يكون لدينا:

$$C\cdot{}_{m|}\partial_{\overline{n|}\,i} = C\cdot\frac{1-u^{-n}}{i}u^{-m+1}$$

ويجب الإشارة إلى أنه عندما نقول لدينا دفعات دورية سنوية فورية تبدأ بعد خمس سنوات من بدء الزمن، هذا يعني أن الدفعات مؤجلة فعلاً خمس سنوات (m=5)، حيث تنفذ الدفعة الأولى في بداية السنة السادسة من بدء الزمن.

مثال:

لنعد إلى المثال الذي ورد سابقاً والمتعلق بالمصرف الزراعي التعاوني الذي قدم قرضاً لتمويل أحد المشاريع الزراعية الكبيرة في بداية العام 2005، على أن يبدأ العميل التسديد على 12 دفعة دورية سنوية فورية تبدأ الأولى منها بعد مرور ثلاث سنوات مباشرة من تاريخ منح القرض.

أوجد القيمة الحالية في تاريخ منح القرض لتلك الدفعات إذا علمت أن قيمة الدفعة الواحدة 800000 ل.س ومعدل الفائدة المركبة السنوي المعمول فيه هو 8%.

الحل:

بما أن $c = 800000$ ، $n = 12$ ، $i = \%8$

والدفعات فورية، فهذا يعني أن فترة التأجيل m=3 والدفعة الأولى تبدأ في بداية السنة الرابعة من تاريخ منح القرض، فتكون القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعات السابقة هي:

$$c \cdot {}_{m|}\partial_{\overline{n|}\, i} = c \cdot \frac{1-u^{-n}}{0.08} \cdot u^{-m+1}$$

$$= 800000 \cdot {}_{3|}\partial_{\overline{12|}\, 0.08} = \frac{1-(1.08)^{-12}}{0.08}(1.08)^{-2}$$

$$= 800000(7.536078)(0.8573388)$$

$$= 5168777.778 \quad \text{ل.س}$$

3- القيمة الحالية لدفعات فورية عاجلة دائمة:

إذا رمزنا بـــ ∂_i للقيمة الحالية لدفعات دورية سنوية فورية عاجلة مـــستمرة إلى مالا نهاية، وقيمة كل منها وحدة نقدية واحدة ، وفي ظل معدل فائدة معمول فيـــه i ، فإن ∂_i ما هي إلّا القيمة الحالية لدفعات دورية سنوية فوريـــة عاجلـــة $\partial_{\overline{n}|\, i}$ عندما ينتهي عدد الدفعات n إلى مالا نهاية، أي:

$$\partial_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1-u^{-n}}{i} \cdot u = \frac{1-u^{-\infty}}{i} \cdot u$$

$$\partial_i = \frac{1-\frac{1}{u^{\infty}}}{i} \cdot u = \frac{1-\frac{1}{\infty}}{i} \cdot u$$

$$\partial_i = \frac{1-0}{i} \cdot u$$

$$\boxed{\partial_i = \frac{u}{i}} \qquad [14]$$

وهي القيمة الحالية في بدء الزمن لدفعات دورية سنوية فورية عاجلة تـــستمر إلى مالا نهاية وبمعدل فائدة مركبة سنوي i ، قيمة كل من الـــدفعات وحـــدة نقديـــة واحدة.

ومن أجل c وحدة نقدية للدفعة الواحدة ⇐

$$c \cdot \partial_i = c \cdot \frac{u}{i}$$

مثال:

لنعد إلى المثال الوارد سابقاً حول التلميذ الذي اشترى له والده شهادة استثمار تعطيه دخلاً سنوياً منتظماً مقداره 72000، على أن تبدأ الدفعة الأولى لحظة الحصول على الشهادة. أوجد القيمة الحالية لشهادة الاستثمار إذا كان معدل الفائـــدة الـــذي أصدرت على أساسه الشهادة هو 8%.

الحل:

بما أن $C=72000$ ، $i=\%8$

والدفعة الأولى ستنفّذ مباشرة عند إصدار الشهادة، فهذا يعني أن الدفعات الـتي سيتلقاها التلميذ هي دفعات دورية سنوية فورية عاجلة، وبمـا أنـه لم يحـدد عـدد الدفعات، فهي دفعات دائمة، وبالتالي فإن القيمة الحالية لتلك الدفعات هي:

$$c \cdot \partial_i = c \cdot \frac{u}{i}$$

$$72000\partial_i = 72000\frac{1.08}{0.08}$$

$$= 972000 \text{ ل.س}$$

4- القيمة الحالية لدفعات فورية مؤجّلة دائمة:

ما هي إلّا القيمة الحالية لدفعات فورية مؤجلة بمقدار m سنة ، وقيمة كل منها وحدة نقدية واحدة والتي سبق ورمزنا لها بالرمز ${}_{m|}\partial_{\overline{n}|i}$ ، عنـدما ينتـهي عـدد الدفعات n إلى مالا نهاية، فإذا رمزنا للقيمة الحالية لدفعات فورية مؤجلة دائمة قيمـة كل منها وحدة نقدية واحدة بـ ${}_{m|}\partial_i$ وكنا قد وجدنا بأن:

$${}_{m|}\partial_{\overline{n}|i} = \frac{1-u^{-n}}{i}u^{-m+1}$$

فيكون لدينا:

$${}_{m|}\partial_i = \lim_{n\to\infty}\frac{1-u^{-n}}{i}\cdot u^{-m+1}$$

$$= \frac{1-u^{-\infty}}{i} \cdot u^{-m+1} = \frac{1-\frac{1}{u^{\infty}}}{i} u^{-m+1}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\infty}}{i} u^{-m+1} = \frac{1-0}{i} u^{-m+1}$$

$$_{m|}\partial_i = \frac{u^{-m+1}}{i} \qquad [15]$$

وهي القيمة الحالية لدفعات دورية سنوية فورية مؤجلة m سنة، قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة وبمعدل فائدة مركبة سنوي معمول فيه i.

ويمكن التعبير عن تلك القيمة بدلالة القيمة الحالية للدفعات العادية المؤجّلة بالشكل:

$$_{m|}\partial_i = {_{m|}\partial_i} \cdot u \qquad ? \qquad [16]$$

مثال:

بالعودة إلى المثال السابق ولنفترض بأن الدفعة الأولى تبدأ بعد ثلاث سنوات مباشرة من تاريخ شراء الشهادة. أوجد القيمة الحالية للشهادة عند شرائها.

الحل:

بما أن i =%8 , c=72000

والدفعة الأولى ستنفّذ بعد ثلاث سنوات مباشرة من تـــاريخ شـــراء شـــهادة الاستثمار (m=3) وبما أن عدد الدفعات لم يحدد، فهي دفعات دائمة والقيمة الحالية لتلك الدفعات هي:

$$c \cdot \partial_i = c \cdot \frac{u^{-m+1}}{i}$$

$$720000\partial_i = 72000\frac{(1.08)^{-2}}{0.08} = 771604.938 \quad \text{ل.س}$$

3.3– القيمة الحالية للدفعات الدورية الجزئية:

وهنا نميز التالي:

3.3.1– القيمة الحالية للدفعات الجزئية العادية:

عرفنا سابقاً الدفعات بأنها دفعات متساوية، لكنها تتم عبر فترات زمنية كل منها أقل من السنة، قد تكون كل شهر أو كل شهرين أو... وهكذا. فلو جزأنا السنة الواحدة إلى K جزء متساو ، وبالتالي من أجل n سنة يكون لدينا $n \cdot K$ جزء متساو خلال المدة المدروسة.

لنفترض أن قيمة كل دفعة هو وحدة نقدية واحدة، فيتم دفع أول وحدة نقدية عند انتهاء الفترة الزمنية الجزئية $\frac{1}{K}$ وثاني وحدة نقدية (ثاني دفعة) عند انتهاء الفترة $\frac{2}{K}$ ... وهكذا... آخر دفعة في السنة الأولى، تدفع عند انتهاء الفترة $\frac{K}{K}$.

عند بدء السنة الثانية، يتم دفع أول وحدة نقدية عند انتهاء الفترة $\frac{K+1}{K}$ والثانية عند انتهاء $\frac{K+2}{K}$ وهكذا... تدفع الدفعة الأخيرة في نهاية السنة n، أي عند انتهاء الفترة الزمنية الجزئية $\frac{n \cdot K}{K}$

لنرمز للقيمة الحالية في بدء الزمن لـ $n \cdot K$ دفعة جزئية عادية بـ $a^{(K)}_{\overline{n|}\, i}$ ، قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة. للوصول إلى هذه القيمة نبدأ بإيجاد القيمة الحالية في بدء الزمن لكل دفعة من الدفعات الجزئية وذلك بالشكل التالي:

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الجزئية الأولى: $(1+i)^{-\frac{1}{K}} = u^{-\frac{1}{K}}$

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الجزئية الثانية: $u^{-\frac{2}{K}}$

....

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الجزئية في آخر السنة الأولى: $u^{-\frac{K}{K}} = u^{-1}$

القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الجزئية الأولى في السنة الثانية: $u^{-\frac{K+1}{K}}$

القيمة الحالية للدفعة الجزئية الثانية في السنة الثانية: $u^{-\frac{K+2}{K}}$

....

القيمة الحالية للدفعة الجزئية الثانية من آخر السنة الثانية: $u^{-\frac{2K}{K}} = u^{-2}$

وهكذا تكون القيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الجزئية في السنة ما قبل الأخيرة (في آخر السنة n-1):

$$u^{-\frac{(n-1)K}{K}} = u^{-n+1}$$

والقيمة الحالية في بدء الزمن للدفعة الجزئية الأخيرة (في آخر السنة n):

$$u^{-\frac{n \cdot K}{K}} = u^{-n}$$

وبأخذ مجموع تلك القيم الحالية والتي تساوي $\overset{(K)}{a}_{\overline{n|}i}$:

$$\overset{(K)}{a}_{\overline{n|}\, i} = u^{-\frac{1}{K}} + u^{-\frac{2}{K}} + \ldots + u^{-1} + \ldots + u^{-n+1} + u^{-n}$$

نلاحظ أن حدود المجموع هي حدود متوالية هندسية حدها الأول $u^{-\frac{1}{K}}$ وأساسها $u^{-\frac{1}{K}}$ وحدها الأخير u^{-n}.

وفقاً لقانون مجموع حدود متوالية هندسية $S_n = \frac{I_1 - rI_n}{1-r}$ ، حيث I_1 الحد الأول، r الأساس، I_n الحد الأخير يكون لدينا:

$$\overset{(K)}{a}_{\overline{n|}i} = \frac{u^{-\frac{1}{K}} - u^{-\frac{1}{K}} \cdot u^{-n}}{1 - u^{-\frac{1}{K}}}$$

نضرب البسط والمقام بـــ $u^{\frac{1}{K}} \Leftarrow$

$$\boxed{\overset{(K)}{a}_{\overline{n|}i} = \frac{1-u^{-n}}{u^{\frac{1}{K}} - 1}} \qquad [17]$$

وهو القيمة الحالية في بدء الزمن لدفعات دورية جزئية عادية قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة، ومعدل الفائدة المركبة السنوي المعمول فيه هو i .

ومن أجل دفعات جزئية قيمة كل منها C، تكون القيمة الحالية لتلك الدفعات بالشكل:

$$c \cdot \overset{(K)}{a}_{\overline{n|}i} = c\frac{1-u^{-n}}{u^{\frac{1}{K}} - 1}$$

مثال:

اشترى عنان من شركة تورنادو للأدوات المترلية، تلفزيون 29 بوصة تقـــسيطاً شهرياً. أوجد القيمة الحالية للتلفزيون عند الشراء إذا علمت أن قيمة القسط الشهري 1600 ل.س ويبدأ الدفع في نهاية كل شهر، معدل الفائدة المركبة السنوي المعمول فيه 10%، وعدد الأقساط 18 قسطاً.

الحل:

بما أن عدد الأقساط $n \cdot \mathrm{K} = 18$ فهذا يوافق أن عدد السنوات $n = \frac{18}{12} = 1.5$ ،

حيث $\mathrm{K} = 12$ كون الأقساط شهرية، معدل الفائدة المركبة السنوي 10%= i ،

وكون قيمة القسط الشهري 1600 ل.س فإن القيمة الحالية لتلك الأقساط عند عملية الشراء هي نفسها القيمة الحالية للتلفزيون:

$$1600 \overset{(\mathrm{K})}{a}_{\overline{n|}\, i}$$

$$1600 \cdot \overset{(\mathrm{K})}{a}_{\overline{n|}\, i} = 1600\, a^{12}_{\overline{1.5|}\, 0.10} = 1600 \frac{1 - u^{-n}}{u^{\frac{1}{\mathrm{K}}} - 1}$$

$$= 1600 \frac{1 - (1.10)^{-1.5}}{(1.10)^{\frac{1}{12}} - 1}$$

$$= 1600 \frac{1 - 0.866784172}{1.007974137}$$

$= 26729.57899$ ل.س

مثال:

اشترى أحد الأشخاص شقة سكنية قيمتها المعروضة نقداً 2 مليون ل.س. دفع من قيمتها مليون ل.س عند توقيع العقد ، وتم الاتفاق على تسديد المبلغ المتبقي أقساطاً شهرية بدءاً من آخر الشهر التالي لتوقيع العقد، مع العلم أن معدل الفائدة المركبة السنوي هو 9%، وفترة التسديد ثلاث سنوات. أوجد قيمة القسط الشهري.

الحل:

المتبقي من ثمن الشقة والمطلوب تسديده هو مليون ل.س، والدفعات شهرية، أي أن $\mathrm{K} = 12$ وفترة التسديد ثلاث سنوات (n=3) هذا يعني أن $n \cdot \mathrm{K} = 36$ دفعة شهرية.

لإيجاد قيمة القسط الشهري، ننطلق من قانون القيمة الحالية لدفعات دورية جزئية عادية تساوي :

$$= c \cdot a^{(K)}_{\overline{n}|\, i}$$

$$1000000 = c\frac{1-u^{-3}}{u^{\frac{1}{12}}-1} \Rightarrow$$

$$c = 1000000 \quad \frac{u^{\frac{1}{12}}-1}{1-u^{-3}} = 1000000 \quad \frac{(1.09)^{\frac{1}{12}}-1}{1-(1.09)^{-3}}$$

$$= 1000000\frac{0.0072073204}{0.227816519} = 31636.5136 \text{ ل.س}$$

3.3.2- القيمة الحالية للدفعات الجزئية الفورية:

بالنسبة للدفعات الجزئية الفورية، قمنا بتجزئة السنة الواحدة بنفس ما اتبعناه في الدفعات الجزئية العادية، والقيمة للدفعة الواحدة تساوي وحدة النقد ومعـــدل فائـــدة مركبة سنوي i ، نصل بالأسلوب نفسه الذي استخدمناه سابقاً إلى القانون التالي

$$\boxed{\partial^{(k)}_{\overline{n}|\, i} = \frac{1-u^{-n}}{u^{\frac{1}{K}}-1} u^{\frac{1}{K}}} \qquad [18]$$

إن $\partial^{(K)}_{\overline{n}|\, i}$ هي القيمة الحالية في بدء الزمن لعدد من الـــدفعات الدوريـــة الجزئية الفورية $n \cdot K$ ، قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة، وبمعدل فائدة مركبة سنوي معمول فيه هو i .

ومن أجل C وحدة نقدية كقيمة للدفعة الواحدة، يكون لدينا:

$$c \cdot \overset{(K)}{a}_{\overline{n|}\, i} = c \cdot \frac{1-u^{-n}}{u^{\frac{1}{K}}-1} u^{\frac{1}{K}} \quad [19]$$

مثال:

قام أحد الأشخاص بشراء حاسوب محمول بالتقسيط الشهري الفوري، حيث تم الاتفاق على تسديد الثمن على 12 دفعة، قيمة كل منها ستة آلاف ل.س وفي ظل معدل فائدة مركبة سنوي معمول فيه 9%. أوجد قيمة الحاسوب المترتب دفعه من قبل الشخص فيما لو أراد شراءه نقداً.

الحل:

بما أنه لدينا أقساط شهرية فهذا يعني أن $K = 12$، وعدد الدفعات 12 دفعة، أي $n \cdot K = 12$ وبالتالي n=1 ، والدفعات فورية. لذلك فإن القيمة الحالية للحاسوب فيما لو أراد شخص شراءه نقداً هو:

$$c \cdot \overset{(K)}{a}_{\overline{n|}\, i} = c \frac{1-u^{-n}}{u^{\frac{1}{K}}-1} u^{\frac{1}{K}}$$

$$= 6000 \frac{1-(1.09)^{-1}}{(1.09)^{\frac{1}{12}}-1} (1.09)^{\frac{1}{12}}$$

$$= 6000 \; \frac{0.082568807}{0.0072073204} (1.0072073220\;\;4)$$

$$= 69232.865 \quad \text{ل.س}$$

3.4- جملة الدفعات الدورية السنوية:

إن الجملة C_n لمبلغ قيمته الحالية C هي ما سيكون عليه المبلغ C بعد انتهاء الـ n سنة، وكما مرّ معنا سابقاً، عندما نقول جملة المبلغ، فهذا يعني أيضاً القيمة

المستقبلية له بنتيجة إيداعه n عاماً وبفائـــدة مركبة قدرها i سنوياً.

سنتناول لاحقاً كيفية الحصول على جملة الدفعات الدورية السنوية والجزئيـــة، فالقيمة المستقبلية للدفعات الدورية السنوية تفترض وجود فترات زمنية (دورات زمنية) متساوية قيمة كل منها سنة واحدة، وذلك للدفعات العادية والفورية.

3.4.1- جملة n دفعة دورية سنوية عادية:

من أجل ذلك ننطلق من قانون الفائدة المركبة الأساسي الذي يعطي جملة المبلغ C_n لمبلغ حالي C وبمعدل فائدة مركبة سنوي i:

$$C_n = C(1+i)^n = C \cdot u^n$$

لتكن لدينا سلسلة الدفعات السنوية العادية n التي قيمة كل منها وحدة نقدية حيث تبدأ الدفعة الأولى في نهاية السنة الأولى من بدء الزمن، وبالتالي فإن:

جملة الدفعة الأولى في نهاية المدة (قيمتها في اللحظة n): u^{n-1}

جملة الدفعة الثانية (قيمتها في اللحظة n): u^{n-2}

وهكذا جملة الدفعة ما قبل الأخيرة (قيمتها في اللحظة n): u

جملة الدفعة الأخيرة وهي قيمة الدفعة نفسها: 1

وإذا رمزنا لمجموع جمل تلك الدفعات بـــ $\lambda_{\overline{n|}\,i}$ ، يكون:

$$\lambda_{\overline{n|}\,i} = 1 + u + u^2 + \ldots + u^{n-2} + u^{n-1}$$

إن حدود المجموع أعلاه ما هي إلّا حدود متوالية هندسية، حدّها الأول $I_1 = 1$، وأساسها $r = u$ وحدّها الأخير $I_n = u^{n-1}$. بتطبيق قانون مجموع حدود متواليـــة هندسية نحصل على:

$$\lambda_{\overline{n|}\,i} = \frac{1 - u \cdot u^{n-1}}{1-u} = \frac{1-u^n}{-i}$$

نضرب البسط والمقام بـــ 1- ⇐

$$\lambda_{\overline{n}|i} = \frac{u^n - 1}{i} \qquad [20]$$

وهو جملة المبلغ في اللحظة n لـــ n دفعة دورية سنوية عادية، قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة، بمعدل فائدة مركبة سنوي معمول فيه i.

وهكذا في حالة وجود دفعات قيمة كل منها c وحدة نقدية، فإن جملتها (قيمتها المستقبلية) في اللحظة n هي $c \cdot \lambda_{\overline{n}|i}$.

مثال:

بعد أن حرّر أحد الأشخاص على نفسه سنداً بقيمة 500000 ل.س يـــدفع بعد عشر سنوات من الآن، أراد تقسيط قيمة السند بشكل سنوي اعتباراً من بدايـــة السنة الثانية التالية لتحرير السند بعد أن تم الاتفاق على معدل فائدة مركبـــة ســـنوي 7%. أوجد قيمة القسط السنوي.

الحل:

إن قيمة السند ما هي إلّا القيمة المستقبلية في اللحظـــة n=10، وبالتـــالي: $C_{10} = 500000$، معدل الفائدة 7%= i وبالتالي يمكن تطبيق قانون جملـــة المبلـــغ لدفعات دورية سنوية عادية قيمة كل منها c وحدة نقدية:

$$c \cdot \lambda_{\overline{n}|i} = c\frac{u^n - 1}{i}$$

$$c \cdot \lambda_{\overline{10}|0.07} = c\frac{(1.07)^{10} - 1}{0.07}$$

$$500000 = c(13.81644796)$$

$$c = 36188.75 \text{ ل.س}$$

3.4.2- الجملة لـــ n دفعة دورية سنوية فورية:

الدفعات هنا تتم في بداية كل سنة ، وبالتالي فإن:

الجملة في اللحظة n للدفعة الأولى التي نفّذت في بدء الزمن: u^n

الجملة في اللحظة n للدفعة الثانية : u^{n-1}

وهكذا فإن الجملة في اللحظة n للدفعة ما قبل الأخيرة : u^2

الجملة في اللحظة n للدفعة الأخيرة : u

وإذا رمزنا لمجموع جمل المبالغ للدفعات كاملة بالرمز $S_{\overline{n}|i}$ فيكون:

$$S_{\overline{n}|i} = \frac{u - uu^n}{1-u} = \frac{u(1-u^n)}{-i} = \frac{1-u^n}{-i} \cdot u$$

نضرب البسط والمقام بـــ 1- $\Leftarrow$

$$\boxed{S_{\overline{n}|i} = \frac{u^n - 1}{i} \cdot u} \qquad [21]$$

وهي الجملة في اللحظة n لـــ n دفعة دورية سنوية فورية قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة، وبمعدل فائدة مركبة سنوي معمول فيه i .

يمكن التعبير عن القيمة $S_{\overline{n}|i}$ بدلالة $\lambda_{\overline{n}|i}$ بالشكل:

$$\boxed{S_{\overline{n}|i} = \lambda_{\overline{n}|i} \cdot u} \qquad [22]$$

مثال:

لو عدنا إلى المثال السابق، مقترضين أن عملية تنفيذ الدفعات ستبدأ عند تحرير السند أوجد قيمة القسط السنوي.

الحل:

لدينا $C_{10} = 500000$ وهذا المبلغ هو الجملة في اللحظة $n=10$ ، معدل الفائدة $i = \%7$ وبما أن بدء تنفيذ الدفعات هو عند تحرير السند، فالدفعات فورية، لذلك يمكن أن نكتب:

$$c \cdot S_{\overline{n}|\, i} = c \cdot \frac{u^n - 1}{i} u$$

$$c \cdot S_{\overline{10}|\, 0.07} = c \cdot \frac{(1.07)^{10} - 1}{0.07} 1.07$$

$$500000 = c(14.7835993) \Rightarrow$$

$$c = 33821.26 \quad \text{ل.س}$$

3.5– جملة الدفعات الدورية الجزئية:

سنعالج جملة هذه الدفعات الدورية بشكليها العادي والفوري بالأسلوب نفسه الذي استخدمناه سابقاً بالنسبة للدفعات السنوية.

3.5.1 – الجملة للدفعات الدورية الجزئية العادية:

إذا جزّأنا السنة الواحدة إلى k فترة زمنية جزئية، وكان لدينا دفعات دورية قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة تتم كل منها عند انتهاء كل فترة زمنية مدتها $\frac{1}{K}$ ، وبوجود فترة استثمار n سنة، فإن عدد الدفعات يكون مساوياً لـ $n \cdot \mathrm{K}$.

لنرمز لجملة المبلغ فيي اللحظة n لـ $n \cdot k$ دفعة جزئية عادية بـ $\lambda^{(\mathrm{K})} i$ قيمة كل دفعة وحدة نقدية واحدة. للوصول إلى الجملة تلك، نبدأ بإيجاد القيمة المستقبلة في اللحظة n للدفعة الجزئية الأولى وهي $u^{n-\frac{1}{\mathrm{K}}}$

ثم الجملة في اللحظة n للدفعة الجزئية الثانية وهي $u^{n-\frac{2}{K}}$

وهكذا الجملة للدفعة الجزئية في آخر السنة الأولى هي $u^{n-\frac{K}{K}}=u^{n-1}$

الجملة للدفعة الجزئية الأولى في السنة الثانية هي $u^{n-\frac{K+1}{K}}$

الجملة للدفعة الجزئية الثانية في السنة الثانية هي $u^{n-\frac{K+2}{K}}$

أما الجملة للدفعة الجزئية في آخر السنة الثانية هي u^{n-2}

وهكذا الجملة للدفعة الجزئية ما فبل الأخيرة هي $u^{\frac{1}{K}}$

أما الجملة للدفعة الجزئية الأخيرة هي 1

وبأخذ مجموع تلك الجمل التي تساوي $\lambda_i^{(K)}$:

$$\lambda_i^{(K)} = 1 + u^{\frac{1}{K}} + u^{\frac{2}{K}} + ... + u^{n-\frac{2}{K}} + u^{n-\frac{1}{K}}$$

وهي حدود متوالية هندسية، حدها الأول $I_1 = 1$ أساسها $r = u^{\frac{1}{K}}$ حدّها الأخير $I_n = u^{n-\frac{1}{K}}$. بتطبيق قانون مجموع حدود متوالية هندسية تحصل على:

$$\lambda_i^{(K)} = \frac{1 - u^{\frac{1}{K}} \cdot u^{n-\frac{1}{K}}}{1 - u^{\frac{1}{K}}} = \frac{1 - u^n}{1 - u^{\frac{1}{K}}}$$

$$\boxed{\lambda_i^{(K)} = \frac{u^n - 1}{u^{\frac{1}{K}} - 1}} \qquad [23]$$

وهو يعطي الجملة في اللحظة n لـــ $n \cdot K$ دفعة دورية جزئية عادية قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة.

ونلاحظ أن المقام ما هو إلاّ معدل الفائدة الجزئي $\frac{i_*}{k}$ الذي ورد معنا سابقاً في فصل الفوائد.

مثال:

احسب الجملة المتكونة بنتيجة إيداع 500 ل.س في نهاية كل شهر ولمدة عشر سنوات، إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة السنوي المعمول فيه هو 5%

الحل:

لدينا دفعات دورية جزئية لمدة $n=10$ سنوات وبما أن الدفعات شهرية فإن $\mathrm{K}=12$ وبالتالي عدد الدفعات $n\cdot\mathrm{K}=120$ دفعة والجملة لتلك الدفعات تعطى بالشكل:

$$500\,\lambda_i^{(\mathrm{K})}=500\frac{u^n-1}{u^{\frac{1}{\mathrm{K}}}-1}$$

$$=500\frac{(1.05)^{10}-1}{(1.05)^{\frac{1}{12}}-1}$$

$$=500\left(\frac{0.628894626}{0.0040741222}\right)$$

$$=77181.611 \quad \text{ل.س}$$

3.5.2- الجملة للدفعات الدورية الجزئية الفورية:

إذا رمزنا لها بـ $S_i^{(\mathrm{K})}$ وكما نلاحظ على محور الزمن أن الدفعة الأولى يتم تنفيذها في بدء الزمن، وبالتالي ينحصر الفرق بين هذه الدفعات وبين الدفعات الجزئية العادية بوجود الفترة الزمنية الجزئية $\frac{1}{k}$.

باعتماد الأسلوب نفسه الذي اتبعناه بخصوص استنتاج القانون المتعلق بالقيمة المستقبلية للدفعات الجزئية العادية نحصل على:

$$S_i^{(K)} = \frac{u^n - 1}{u^{\frac{1}{K}} - 1} u^{\frac{1}{K}} \qquad [24]$$

هذا القانون يعطي الجملة لـــ $n \cdot K$ دفعة دورية جزئية فورية قيمة كل منـــها وحدة نقدية واحدة، و بمعدل فائدة مركبة سنوي معمول فيه i . وبالتـــالي، فـــإن الجملة عندما تكون قيمة الدفعة الواحدة C وحدة نقدية هي:

$$c \cdot S_i^{(K)} = c \frac{u^n - 1}{u^{\frac{1}{K}} - 1} u^{\frac{1}{K}} \qquad [25]$$

مثال:

بالعودة إلى المثال السابق وبافتراض أن الإيداع سيتم في بداية كل ثلاثة أشهر ، أوجد جملة الدفعات (القيمة المستقبلية) المتكونة بعد مرور عشر السنوات.

الحــــل:

بما أن الإيداع في بداية كل ثلاثة أشهر، فالدفعات فورية ولدينا $K = \frac{12}{3} = 4$

وبالتالي عدد الدفعات يصبح $n \cdot k = (10)(4) = 40$

جملة هذه الدفعات بعد مرور عشر سنوات هي:

$$500 \cdot S_i^{(K)} = 500 S_{0.05}^{(4)}$$

$$= 500 \frac{u^n - 1}{u^{\frac{1}{K}} - 1} u^{\frac{1}{K}}$$

$$= 500 \frac{(1.05)^{10} - 1}{(1.05)^{\frac{1}{4}} - 1} (1.05)^{\frac{1}{4}}$$

$$= 500 \frac{0.628894626}{0.012272234} 1.012272234$$

$= 25937.11$ ل.س

6.3 – تمارين غير محلولة

1- أراد أحد الأشخاص أن يدفع تبرعاً سنوياً لمدة عشر دفعات سنوية دورية عادية و ذلك لإحدى الجمعيات قيمة كل منها 3000 $ ، إذا علمت أن معدل الفائدة السنوي 9% و أن الدفعة الأولى تستحق بعد عام كامل من الآن (من بدء الزمن) ،فكم يجب على هذا الشخص أن يودع في المصرف حتى يتحقق له ذلك ؟

2- إذا كانت الدفعات تدفع في نهاية كل عام ، و أن مجموع القيم الحالية لـ عشر دفعات سنوية هو 100000 ل.س ، و أن معدل الفائدة السنوي المأخوذ بعين الاعتبار هو 7% ،أوجد قيمة كل دفعة .

3- أعد التمرين الأول مفترضاً أن الدفعات هي دفعات دائمة وليست لمدة عشر دفعات فقط ؟

4- في صياغة أخرى للتمرين الأول ، إذا كانت القيمة الحالية لدفعات دورية سنوية عادية قيمة كل منها 3000 $ هي 19253 $ ، أثبت رياضياً أن عدد الدفعات هي عشر .

5- قام المصرف العقاري بتمويل أحد المشاريع السياحية على أساس أن يدفع المصرف للمشروع مبلغاً من المال في أول عام 2008 مقابل أن يسدد صاحب المشروع 15 دفعة دورية سنوية عادية تبدأ الأولى منها في بداية عام 2010 إذا علمت أن قيمة الدفعة الأولى الذي سيدفعها صاحب المشروع للمصرف العقاري تساوي مليون و نصف ليرة سورية و أن معدل الفائدة المعمول به لمثل هذه القروض يساوي 12.5% ، أوجد المبلغ الذي يجب أن يمول به المشروع من قبل المصرف العقاري .

6- اوجد القيمة الحالية في بدء الزمن لدفعات سنوية عادية دائمة في كل منها 50000 ل.س و ذلك عن فائدة مركبة سنوية قدرها 10% إذا كانت الدفعات :

أ- عاجلة   ب- مؤجلة لمدة ست سنوات من بدء الزمن

7- أوجد القيمة الحالية في بدء الزمن لـ 48 دفعة شهرية فورية قيمة كل منها 10000 ل.س تستحق أولى الدفعات في بدء الزمن و تستحق لمدة أربع سنوات ، إذا علمنا أن معدل الفائدة الشهري 1.5% .

8-بالاستفادة من معطيات التمرين الخامس و بفرض أن الدفعات دورية سنوية فورية ، أوجد المبلغ الذي يجب أن يمول به المشروع من قبل المصرف العقاري ،ماذا تستنتج عند مقارنة نتائج التمرين الثامن مع نتائج التمرين الخامس ؟ علل النتائج .

9- أوجد القيمة الحالية في بدء الزمن لدفعات سنوية فورية تتوالى ابد الدهر قيمة كل منها 8000 $ و ذلك عند معدل للفائدة السنوية المركبة 6% .

10- احسب بتاريخ الأول من نيسان لعام 1995 قيمة اثنتي عشرة دفعة سنوية قيمة كل منها 20000 وحدة نقدية تستحق الأولى منها الأداء في بداية عام 1997 و ذلك عند فائدة سنوية مركبة قدرها 10% .

11- احسب القيمة الحالية في بدء الزمن لثماني دفعات سنوية قيمة كل منها 10000 وحدة نقدية ، تستحق الأولى بعد سبعة أشهر من بدء الزمن ، و تتوالى الدفعات بحيث يكون الفاصل الزمني بين كل دفعتين متتاليتين عاماً كاملاً ، و ذلك عند فائدة سنوية مركبة قدرها 10% .

12- عرض أحد المصارف الخاصة العرضين التاليين لشراء السيارات عن طريق ذلك المصرف :

A - أن يدفع الزبون 10% من قيمة السيارة (قيمة السيارة 1500000 نقداً) و ذلك عند استلامها و من ثم يبدأ بالتقسيط الشهري و لمدة خمس سنوات (دفعات عادية شهرية) عند فائدة مركبة سنوية قدرها 14% .

B - أو أن يستلم الزبون السيارة السابقة و بدون دفعة أولية على أن يتم تقسيط ثمنها و لمدة خمس سنوات بفائدة سنوية مركبة قدرها 20% (دفعات عادية شهرية).

- احسب القسط الشهري الواجب دفعه في كلتا الحالتين .

- أي العرضين أفضل للزبون العرض A أم العرض B و لماذا ؟

13- أعد التمرين السابق و بفرض أن الدفعات كانت فورية شهرية، ماذا تستنتج بمقارنة نتائج التمرين 12 و 13 ؟

14- أوجد جملة عشر دفعات سنوية قيمة كل منها 5000 $ تذفع أولى الدفعات في نهاية السنة الأولى اعتباراً من بدء الزمن (الجملة في نهاية السنة العاشرة) معدل الفائدة السنوي 9%.

15- أعد المثال السابق بفرض الدفعة الأولى تدفع في بداية الزمن ، قارن بين نتائج التمرين 14 و 15 ماذا تستنتج و لماذا ؟

16- من أجل تكوين رأس مال في أحد المصارف قرر أحد الأشخاص أن يدفع دفعات سنوية (قيمة كل منها 20000 ل.س) أولى الدفعات كانت في بداية عام 1980 ، ما هو مقدار رأس المال المتكون في نهاية عام 2007 إذا علمت أن معدل الفائدة السنوي المأخوذ بعين الاعتبار في هذا المصرف يساوي 5% .

17- أعد التمرين السابق و بفرض أن الدفعات كانت شهرية قيمة كل منها 1700 ل.س بمعدل فائدة شهري قدره 1% احسب رأس المال المتكون في نهاية عام 2007 أيضاً .

18- أراد أحد الأشخاص أن يبيع بيته ، و كانت أمامه الخيارات التالية المقدمة من أحد المشترين لهذا البيت (إذا علمت أن سعر البيت الآن 5000000 ل.س)

أ- تحرير سند بقيمة 7000000 ل.س يستحق السداد بعد خمس سنوات من الآن

ب _ تسديد دفعات سنوية لمدة عشر سنوات قيمة كل دفعة 850000 ل.س تبدأ الدفعةالأولى في بداية السنة الثانية من كتابة العقد .

جـ- تسديد دفعات شهرية لمدة عشر سنوات قيمة كل دفعة شهرية 90000 ل.س تبدأ الدفعة الأولى عند كتابة العقد .

أي الخيارات أفضل بالنسبة لصاحب البيت إذا علمت أن معدل الفائدة السنوي هو 4% ؟

19- أوجد القيمة المستقبلية في نهاية السنوات العشر اعتباراً من بدء الزمن لعشرين دفعة نصف سنوية قيمة كل دفعة 15000 ل.س تستحق أول دفعة بعد ستة أشهر من بدء الزمن ، إذا علمت أن معدل الفائدة المعتمد يساوي 7% .

20- أعد التمرين السابق بفرض أن الدفعة الأولى تستحق في بدء الزمن، قارن بين القيمة المستقبلية للتمرين 19 و للتمرين 20 ماذا تستنتج ؟ علل ذلك .

21- في 1/1/2000 تم التعاقد مع أحد المصارف بأن يتم الإيداع في هذا المصرف بمعدل أربعة إيداعات في كل عام و لمدة خمس سنوات (الفترات الزمنية بين كل إيداع هي فترات متساوية) إذا علمت أن قيمة الإيداع الواحد يساوي 10000 ل.س و أن أولى الإيداعات تستحق في تاريخ التعاقد، و المطلوب حساب جملة هذه الإيداعات بتاريخ 1/10/2004 و هو تاريخ الإيداع الأخير علماً أن معدل الفائدة السنوية المعمول بها في هذا المصرف 5%.

22- أعد التمرين السابق و المطلوب حساب جملة هذه الإيداعات بتاريخ 31/12/2004 .

الفصل الرابع

جداول الحياة والوفاة

Life table or mortality table

4.1- تعريف جداول الحياة والوفاة

4.2- تكوين جداول الحياة والوفاة

4.3- أساليب إنشاء جدول الحياة والوفيات

4.4- تطبيقات على استخدام جداول الحياة و الوفاة

4.5- توقع الحياة

4.6- المعدل الآني للوفاة والحياة

4.7- تمارين غير محلولة

الفصل الرابع
جداول الحياة والوفاة

4.1- تعريف جداول الحياة والوفاة:

جداول الحياة والوفاة هي جداول يمكن من خلال الرجوع إليها تأسيس احتمالات الحياة والوفاة عند كل عمر من الأعمار المختلفة. وبالتالي هي أداة تصف نموذج التغيرات الحياتية (ما يطرأ عليها من حياة ووفاة) حسب العمر، وذلك في مجتمع معين وفي زمن معين.

إن أهم استخدامات جداول الحياة والوفاة ينحصر في:

1-المقارنة بين الأحوال الصحية لمجتمعين مختلفين في فترة زمنية معينة.

2-المقارنة بين الأحوال الصحية لفترتين زمنيتين مختلفتين في مجتمع ما.

3-الاستخدام من قبل شركات التأمين في حساب أقساط التأمين على الحياة.

من المهم عند إعداد و تصميم جداول الحياة أو جداول الوفاة، الانتباه إلى البيانات الخاصة بذلك والتي يمكن الحصول عليها من مصادر مختلفة، أهمها:

1-**مصادر ذات صفة عامة:** مثل السجلات الرسمية المتعلقة بالوفاة والولادات والتعدادات السكانية.

2-**مصادر ذات صفة خاصة:** وهي تعطي البيانات المتعلقة بشريحة معينة من المجتمع، مثل بيانات شركات التأمين وصناديق التأمين والهيئات والنقابات المختلفة.

هذا وتتنوع صور وأشكال جداول الحياة و الوفاة وفق الدولة التي تصممها وكذلك وفق الهدف من تصميمها ووفق مصادر البيانات اللازمة لها.

فجداول الحياة والوفيات المستخدمة من قبل شركات التأمين يجب أن تصمم من واقع خبرة تلك الشركات.

إن أول جدول حياة ووفاة تم تصميمه عام 1895 في بريطانيا من قبل الشركة الإنكليزيـــة Equitable، وأكثـــر الجـــداول اســتخداماً هـــي الجـــدول الإنكليزي(UIT 1924-1949 A). وهناك جدول الحياة الأمريكـــي لعـــام 1980 cso

The 1980 Commissioners Standard Ordinary Mortality Table

وهو يتكون من جزأين، الأول جدول حياة للذكور males والثاني جدول حيـــاة للإناث females .

وهناك أيضاً جدول الحياة للموظفين الفرنسيين والذي أعدّ عام 1895 ، وقد عدّل فيما بعد وفق قانون ماكهام اعتباراً من العمر 26 فما فوق، أما الأعمار الأقـــل من 26 فقد عدّل على أساس كثيرة حدود من الدرجة السادسة.

4.2- تكوين جداول الحياة والوفاة:

يتكون جدول الحياة والوفاة من عدة حقول كما سنجد لاحقاً، إلا أنه يمكن القول بشكل عام إنه يتكون من خمسة حقول أساسية وهي:

1-العمر (أو السّن) (x):

وهو أول حقل في الجدول، حيث يتضمن الأعمار المختلفـــة الـــتي يـــشملها الجدول. وعادة ما يبدأ الجدول بالعمر صفر (أي المواليد) أو 10سنوات أو 20 ســـنة وينتهي بالعمر 99 أو 100 أو 101ســـنة، ويرمز عادةً لآخر سن موجود في الجـــدول بالرمز ω .

2-عدد الأحياء (L_x):

ويشير إلى عدد الباقين على قيد الحياة عند تمام العمر x ، وهكذا فإن L_{x+1} هو عدد الباقي على قيد الحياة عند تمام العمر $x+1$ وهكذا...

فإذا كان الجدول يتضمن مقابل العمر $x = 45$ وجود 6000 شخص في حقل L_x، فهذا يعني أن L_{45} =6000 ، وهو يعبر عن عدد الباقين على قيد الحياة عند العمر 45.

هذا ويبدأ عادة جدول الحياة أو الوفاة برقم افتراضي كبير يطلق عليه أساس الجدول Radix ، وهو في الجدول الأمريكي لعام 1980 يساوي 185890 شخص ويتناقص هذا العدد من سنة إلى أخرى تبعاً لعدد الوفيات المقابلة لسنوات العمر المختلفة وهكذا وصولاً إلى آخر عمر في الجدول ω ، حيث يصبح عدد الأحياء يساوي عدد الوفيات، أما عند العمر $\omega + 1$ يصبح $L_x = 0$

إن عدد الأحياء عند أي عمر هو عبارة عن عدد الأحياء عند العمر الذي يسبقه مطروحاً منه عدد الوفيات خلال السنة، أي:

$$L_{x+1} = L_x - (\text{عدد الوفيات بين العمر } x \text{ والعمر } x+1)$$

3-عدد الوفيات (d_x):

وتشير الأرقام الموجودة في هذا الحقل إلى عدد الوفيات التي وقعت بين العمر x والعمر $x+1$.

إذ يمكن التعبير عن الذين توفّوا بين العمر 60 والعمر61 (الذين بلغوا العمر 60 و لم يبلغوا العمر61) بالرمز d_{60} . وبالتالي يمكن الحصول على d_{60} من خلال الصيغة:

$$d_{60} = L_{60} - L_{61}$$

وبشكل عام يكون لدينا:

$$\boxed{d_x = L_x - L_{x+1}} \qquad (1)$$

وهو عدد الوفيات بين العمر x والعمر $x+1$

4-احتمال الوفاة (q_x):

يشير هذا الحقل إلى احتمال وفاة شخص موجود عند العمر x قبل بلوغه العمر $x+1$ (أي يتوفى خلال السنة التالية لـ x دون بلوغه العمر $x+1$) . من هنا واستناداً إلى المبادئ الأساسية للاحتمالات يكون:

$$q_x = \frac{d_x}{L_x} \quad (2)$$

أي النسبة بين عدد الوفيات بين العمر x والعمر $x+1$ من جهة ، وعدد الأحياء عند العمر X من جهة أخرى.

5-احتمال الحياة (p_x):

ويشير إلى احتمال بقاء الشخص الموجود على العمر x حياً لمدة سنة تالية، أي احتمال بلوغه العمر $x+1$. وبالتالي يكون:

$$p_x = \frac{L_{x+1}}{L_x} \quad (3)$$

أي النسبة بين عدد الأحياء عند العمر $x+1$ وعدد الأحياء عند العمر x.

وهنا نشير إلى أنه يمكن الاكتفاء بالحقول الثلاثة الأولى في إنشاء أو تصميم جدول الحياة، إذ يمكن اشتقاق قيم الحقلين الرابع والخامس من تلك الحقول، فلا نستغرب إذا وجدنا جداول حياة بثلاثة حقول فقط أو أربعة كما في الجدول الأمريكي لعام 1980(cso).

من العلاقات السابقة يمكن عرض بعض العلاقات التي تعتبر هامة وضرورية أثناء الاستفادة من جدول الحياة:

من العلاقة (1) نجد أنّ:

$$L_x = L_{x+1} + d \qquad (4)$$

ومن العلاقة (2) نجد أن:

$$d_x = L_x . q_x \qquad (5)$$

وإذا عوضنا العلاقة (1) في العلاقة (2) نجد أن:

$$q_x = \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x} = 1 - p_x \Longrightarrow$$

$$p_x + q_x = 1 \qquad (6)$$

وهذا يتفق تماماً مع مبادئ الاحتمالات الأساسية ، أي:

احتمال الحياة + احتمال الوفاة = 1

من العلاقة (3) نجد أن:

$$L_x = \frac{L_{x+1}}{p_x}$$

و عند العمر ω نلاحظ أنّ $L_{\omega+1} = 0$ ، أي أن عدد الأحياء عند العمر ω جميعهم يتوفون قبل أن يتمّوا العمر $\omega + 1$ ، وبالتالي:

$$d_\omega = L_\omega - L_{\omega+1}$$
$$= L_\omega - 0$$
$$d_\omega = L_\omega \qquad (7)$$

4.3– أساليب إنشاء جدول الحياة والوفيات:

سبق وأن ذكرنا بأن جداول الحياة والوفاة تختلف باختلاف أساليب إنشائها أو تصميمها وحسب الغرض من ذلك. نبين فيما يلي ثلاثة أساليب رئيسية معروفة في هذا المجال:

1-أسلوب التتبُّع:

وفقاً لهذا الأسلوب يجري البدء بتتبُّع مجموعة كبيرة جداً من المواليد، ولتكن 150000 شخص، وذلك منذ لحظة ميلادهم وحتى لحظة وفاتهم. يتم أثناء ذلك رصد وتسجيل عدد الأشخاص الذين أتمّوا x من سنوات العمر الكاملة ولكنهم توفوا قبل بلوغهم تمام العمر $x+1$ ، أي dx .

وكذلك رصد وتسجيل عدد الباقين على قيد الحياة الذين أتموا x من السنوات الكاملة من العمر ، أي Lx ، وذلك بالنسبة لكل عمر x بدءاً من $x=0$ (بداية الجدول) وحتى العمر ω (آخر عمر في حقل العمر في الجدول)، وهو نهاية حياة جميع أفراد المجموعة، أي $x = \overline{0, \omega}$

وهكذا بعد حساب Lx و dx يمكن معرفة قيم الحقول الأخرى للجدول، باستخدام العلاقات التي سبق و ذكرناها.

2-أسلوب نتائج التعداد:

حيث يجري الاعتماد على البيانات التي تأتي بها التعدادات السكانية الشاملة، وبالتحديد البيانات التالية:

1- عدد الأشخاص الذين بلغوا x سنة كاملة من العمر ،أي (Lx) ، وذلك لكل عمر من الأعمار x، حيث $x=\overline{0,\omega}$

2- عدد الأشخاص الذين توفوا بين العمر x والعمر $x+1$ ، أي dx وذلك لكل عمر من الأعمار x، حيث $x=\overline{0,\omega}$

بعد ذلك يتم حساب احتمال الوفاة q_x من العلاقة :

$$q_x = \frac{d_x}{L_x}$$

ومن ثم تستكمل بقية البيانات المكونة لجدول الحياة من خلال العلاقات السابق ذكرها والمتعلقة بـ L_{x+1} احتمال الحياة p_x وغير ذلك.

3-أسلوب بيانات المؤمَّن:

يستخدم هذا الأسلوب لإنشاء جداول حياة ووفاة معدّة لأغراض حساب تكلفة الخدمات التأمينية (الأقساط) ، إذ من المعروف أن حملة وثائق التأمين يتميزون بوجود خصوصية من حيث مستواهم الصحي الأفضل ودرجة وعيهم الأكبر قياساً ببقية أفراد المجتمع وغير ذلك.

من هنا، تلجأ شركات التأمين ومن مواقع بياناتها وسجلاتها حول المؤمن لهم إلى حساب احتمالات الوفاة q_x لكافة الأعمار x ، حيث $x = \overline{0,\omega}$ ، ومن أجل عدد كبير افتراضي من المؤمن لهم كأساس للجدول (L_0) ، حيث يجري بعدها حساب بقية البيانات انطلاقاً من العلاقتين الأساسيتين:

$$L_{x+1} = L_x - d_x \qquad \text{و} \qquad d_x = L_x . q_x$$

4.4- تطبيقات على استخدام جداول الحياة و الوفاة:

نعرض في الملحق رقم(1) الوارد في نهاية الكتاب نموذجاً لجدول حياة مكون من خمسة حقول هي العمر (x) ؛ عدد الأحياء (L_x) ؛ عدد الوفيات (d_x)؛ احتمال الوفاة (q_x) ؛ احتمال الحياة (p_x) ، حيث يبدأ العمر x من 0 وينتهي في ω = 102 ، أما عدد الأحياء (أساس الجدول) فهو 100000 من المواليد الأحياء.

سوف نستخدم في التطبيقات التالية في هذا الكتاب البيانات الواردة في الجدول المذكور، المعد من قبل المؤلفين.

4.4.1-احتمال حياة شخص عمره x لمدة n سنة تالية:

سبق أن أوجدنا احتمال حياة شخص عمره x لمدة سنة تالية بالشكل:

$$p_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}$$

أما احتمال حياة شخص عمره x لمدة سنتين تاليتين يكون:

$$_2 p_x = \frac{L_{x+2}}{L_x}$$

وهكذا، احتمال حياة شخص عمره x لمدة n سنة تالية هو:

$$\boxed{_n p_x = \frac{L_{x+n}}{L_x}}$$

أي النسبة بين عدد الأشخاص الذين بلغوا العمر $x+n$ وبين عدد الأشخاص على العمر x

مثال:

شخص عمره 40 سنة، والمطلوب حساب الاحتمالات التالية:

1-أن يعيش حتى تمام (بلوغ) العمر 50 سنة

2- أن يعيش خمس عشرة سنة تالية للعمر 40

3- أن يعيش لمدة سنة واحدة تالية للعمر 40

الحل:

لدينا $x=40$ وبالتالي:

1- المطلوب هو $_{10}P_{40}$، أي $x=40$ ، $n=10$ وبالتالي:

$$_n p_x = \frac{L_{x+n}}{L_x}$$

ومن الجدول الملحق نجد أن :

$$_{10} p_x = \frac{L_{50}}{L_{40}} = \frac{64882}{71733} = 0.904493$$

إذاً باحتمال 90.4453 % سوف يعيش الشخص الموجود حالياً عند العمر 40 حتى يبلغ تمام الــ 50 من العمر.

2- $x=40$، $n=15$ وبالتالي المطلوب هو $_{15}P_{40}$:

$$15P_{40} = \frac{L_{55}}{L_{40}} = \frac{60363}{71733} = 0.8414955$$

وهو احتمال أن يعيش الشخص الموجود حالياً على العمر 40 لمدة 15 سنة تالية.

3- $x=40$ ، $n=1$ ، والمطلوب هو p_{40}

$$P_{40} = \frac{L_{41}}{L_{40}} = \frac{71135}{71733} = 0.9916635$$

وهو احتمال أن يعيش الشخص الموجود حالياً على العمر 40لمدة سنة تالية.

4.4.2 – احتمال وفاة شخص عمره x خلال الـ n سنة التالية:

وصلنا سابقاً إلى أن احتمال وفاة شخص عمره x خلال السنة التالية، أي قبل أن يصل للعمر $x+1$ هو q_x ، حيث:

$$q_x = \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x}$$

أما احتمال وفاة شخص عمره x خلال السنتين التاليتين ، أي قبل بلوغه العمر $x+2$ هو $_2q_x$ حيث أن:

$$2q_x = \frac{L_x - L_{x+2}}{L_x} = \frac{d_{x+1}}{L_x}$$

وهكذا، نجد أن احتمال وفاة شخص عمره x خلال الـ n سنة التالية ، أي قبل بلوغه العمر $x+n$ هو $_nq_x$ ،حيث:

$$_nq_x = \frac{L_X - L_{x+n}}{L_X}$$

مثال:

شخص عمره الآن 35 سنة والمطلوب ما يلي:

1-احتمال أن يموت خلال الخمس عشرة سنة القادمة

2-احتمال أن يموت خلال السنوات الثلاثين القادمة

3-احتمال أن يموت خلال السنة القادمة.

الحل:

لدينا $x = 35$ ، وبالتالي:

1- $n = 15$ ، هذا يعني أن المطلوب هو ${}_{15}q_{35}$

$${}_{n}q_{x} = \frac{L_x - L_{x+n}}{L_x}$$

ومن الجدول الملحق نجد أن:

$${}_{15}q_{35} = \frac{L_{35} - L_{50}}{L_{35}} = \frac{74550 - 64882}{74550}$$

$$= 0.1296847$$

وهو احتمال أن يموت الشخص ذو العمر 35 قبل أن يبلغ العمر 50 .

2- $n = 30$ ، والمطلوب هو ${}_{30}q_{35}$

$${}_{30}q_{35} = \frac{L_{35} - L_{65}}{L_{35}} = \frac{74550 - 47385}{74550}$$

$$= 0.3643863$$

وهو احتمال أن يموت الشخص ذو العمر 35 قبل أن يبلغ العمر 65 .

3- $n = 1$ ، والمطلوب هو q_{35}:

$$q_{35} = \frac{L_{35} - L_{36}}{L_{35}} = \frac{74550 - 74007}{74550}$$

$$= 0.0072837$$

وهو احتمال أن يموت الشخص ذي العمر 35 قبل بلوغه الـــ 36 عاماً.

و يمكن أيضاً ومباشرةً من الجدول الاعتماد على حقل d_x ، حيث:

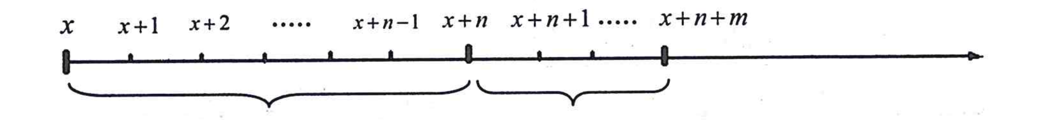
$$q_x = \frac{d_x}{L_x} \Rightarrow$$

$$q_{35} = \frac{d_{35}}{L_{35}} = 0.0072837$$

وهو الإجابة السابقة نفسها.

4.4.3–احتمال أن شخصاً عمره الآن x يعيش n سنة تالية ويموت خلال الـ m سنة التالية لها:

أي احتمال أن يبلغ الشخص العمر $x+n$ ثم يموت قبل أن يصل الـ $x+n+m$ من العمر . نرمز لذلك بالرمز $_{n|m}q_x$، و بالنظر إلى المحور التالي:



n سنة $\qquad\qquad$ m سنة

لإيجاد الاحتمال $_{n|m}q_x$، نوجد أولاً احتمال أن يبقى الشخص حيّاً حتى العمر $x+n$ ، أي $_n p_x$ ، ثم نوجد احتمال أن يموت وهو على العمر $x+n$ خلال m سنة تالية لهذا الغمر ، أي $_m q_{x+n}$:

$$_n p_x = \frac{L_{x+n}}{L_x}$$

$$_m q_{x+n} = \frac{L_{x+n} - L_{x+n+m}}{L_{x+n}}$$

وبالتالي:

$$
\begin{aligned}
{}_{n|m}q_x &= {}_n p_x \cdot {}_m q_{x+n} \\
&= \frac{L_{x+n}}{L_x} \cdot \frac{L_{x+n} - L_{x+n+m}}{L_{x+n}} = \frac{L_{x+n} - L_{x+n+m}}{L_x}
\end{aligned}
$$

إذاً:

$$
\boxed{{}_{n|m}q_x = \frac{L_{x+n} - L_{x+n+m}}{L_x}}
$$

أيضاً ، يمكن التعبير عن ذلك بالصيغة الناتجة عن التالي:

$$
{}_{n|m}q_x = \frac{L_{x+n}}{L_x} - \frac{L_{x+n+m}}{L_x}
$$

$$
\boxed{{}_{n|m}q_x = {}_n p_x - {}_{n+m}p_x}
$$

وكحالة خاصة، عندما $m=1$ ، فإنّ الرمز السابق يؤول إلى ${}_{n|}q_x$ وهو يـــشير إلى احتمال أن يعيش الشخص الموجود حالياً على العمر x حتى العمر $x+n$ ومن ثم يموت خلال السنة التالية لذلك ، وهذا يوافق:

$$
{}_{n|}q_x = \frac{L_{x+n} - L_{x+n+1}}{L_x}
$$

$$
\boxed{{}_{n|}q_x = \frac{d_{x+n}}{L_x}}
$$

مثال:

شخص عمره الآن 41 سنة والمطلوب حساب ما يلي:

1- احتمال أن يعيش لمدة عشر سنوات قادمة ثم يموت خلال السنتين التاليتين لها.

2- احتمال أن يعيش حتى بلوغ العمر 49 سنة، ثم يموت خلال السنوات الثلاث التالية.

3- احتمال أن يعيش حتى بلوغ العمر 51 سنة ثم يموت خلال السنة التالية لذلك.

الحل:

1- إن احتمال أن يعيش الشخص الموجود الآن على العمر 41 لمدة عشر سنوات قادمة ثم يموت خلال السنتين التاليتين لها هو $_{10|2}q_{41}$ ، حيث:

$$_{n|m}q_x = \frac{L_{x+n} - L_{x+n+m}}{L_x}$$

ومن الجدول الملحق نجد أن:

$$_{10|2}q_{41} = \frac{L_{51} - L_{53}}{L_{41}} = \frac{64054 - 62291}{71135}$$

$$_{10|2}q_{41} = 0.02478386$$

أو الانطلاق مباشرةً من الصيغة:

$$_{n|m}q_x = {}_np_x - {}_{n+m}p_x$$

فنصل إلى النتيجة نفسها.

2- احتمال أن يعيش الشخص نفسه حتى بلوغ العمر 49، أي أن يعيش لمدة ثماني سنوات قادمة ، ومن ثمّ يموت خلال السنوات الثلاث التالية ، هو $_{8|3}q_{41}$:

$$_{8|3}q_{41} = {}_8p_{41} - {}_{8+3}p_{41}$$

$$= {}_8p_{41} - {}_{11}p_{41} = \frac{L_{49}}{L_{41}} - \frac{L_{52}}{L_{41}}$$

ومن الجدول الملحق نجد أن:

$$ {}_{8|3}q_{41} = \frac{65677}{71135} - \frac{63192}{71135} $$
$$ = 0.034933577 $$

4-إن احتمال أن يعيش الشخص حتى العمر 51 سنة ، تعني أن يعيش لمدة عشر سنوات تالية ، ثم يموت خلال السنة التالية ، أي قبل بلوغه الـ 52 سنة هو ${}_{10|}q_{41}$:

$$ {}_{n|}q_x = \frac{d_{x+n}}{L_x} \qquad \Rightarrow {}_{10/}q_{44} = \frac{d_{51}}{L_{41}} = \frac{862}{71135} = 0.0.0121178 $$

مثال:

ثلاثة أشخاص a ،b ، c أعمارهم 40 ،45 ،50 سنة علــى التــوالي ، وكان احتمال بقائهم جميعاً على قيد الحياة لمدة خمس سنوات أخرى يساوي 0.36 ، فإذا علمت أن عدد الأحياء عند العمر 55 هو 000 100 شــخص ، المطلــوب: حساب احتمال وفاة الشخص a في أية لحظة قبل بلوغ العمر 55 سنة.

الحل:

من مبادئ الاحتمالات يمكن أن نكتب:

$$ {}_5p_{40} \cdot {}_5p_{45} \cdot {}_5p_{50} = 0.36 $$
$$ \frac{L_{45}}{L_{40}} \cdot \frac{L_{50}}{L_{45}} \cdot \frac{L_{55}}{L_{50}} = 0.36 $$
$$ \frac{L_{55}}{L_{40}} = 0.36 \Rightarrow L_{40} = \frac{L_{55}}{0.36} $$

$$ L_{40} = \frac{100000}{0.36} = 277778 $$ شخصاً

وبالتالي، المطلوب هو ${}_{15}q_{40}$ ، حيث:

$$ {}_{15}q_{40} = \frac{L_{40} - L_{55}}{L_{40}} = \frac{277778 - 100000}{277778} = 0.64 $$

إذاً إن احتمال وفاة الشخص a قبل بلوغه العمر 55 سنة هو 64%.

مثال:

إذا عدنا إلى المثال السابق و بافتراض أنه من المعلوم لنـــا فقـــط أعمـــارهم ، والمطلوب حساب:

أ- احتمال حياة الثلاثة لمدة خمس سنوات.

ب- احتمال وفاة واحد فقط منهم خلال خمس سنوات .

الحل:

1- احتمال حياة الثلاثة a، b، c لمدة خمس سنوات:

$$ {}_5P_{40,45,50} = {}_5P_{40} \cdot {}_5P_{45} \cdot {}_5P_{50} $$

$$ = \frac{L_{45}}{L_{40}} \cdot \frac{L_{50}}{L_{45}} \cdot \frac{L_{55}}{L_{50}} $$

$$ = \frac{L_{55}}{L_{40}} = \frac{60363}{71733} = 0.84149555 $$

2- احتمال وفاة واحد فقط من الأشخاص الثلاثة خلال خمس سنوات ، والتي إذا رمزنا له بالرمز:

$$ {}_5p_{\overline{40,45,50}}^{[1]} $$

فهو يساوي إلى:

احتمال وفاة a وحياة كل من b و c .

أو احتمال وفاة b وحياة كل من a و c .

أو احتمال وفاة c وحياة كل من a و b .

وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$ {}_5p_{\overline{40,45,50}}^{[1]} = {}_5q_{40} \cdot {}_5p_{45} \cdot {}_5p_{50} + {}_5q_{45} \cdot {}_5p_{40} \cdot {}_5p_{50} + {}_5q_{50} \cdot {}_5p_{40} \cdot {}_5p_{45} $$

$$=\frac{L_{40}-L_{45}}{L_{40}}\cdot\frac{L_{50}}{L_{45}}\cdot\frac{L_{55}}{L_{50}}+\frac{L_{45}-L_{50}}{L_{45}}\cdot\frac{L_{45}}{L_{40}}\cdot\frac{L_{55}}{L_{50}}+\frac{L_{50}-L_{55}}{L_{50}}\cdot\frac{L_{45}}{L_{40}}\cdot\frac{L_{50}}{L_{45}}$$

$$=\frac{L_{40}-L_{45}}{L_{40}}\cdot\frac{L_{55}}{L_{45}}+\frac{L_{45}-L_{50}}{L_{40}}\cdot\frac{L_{55}}{L_{50}}+\frac{L_{50}-L_{55}}{L_{40}}$$

$$=\frac{L_{55}}{L_{40}}\left[\frac{L_{40}-L_{45}}{L_{45}}+\frac{L_{45}-L_{50}}{L_{50}}\right]+\frac{L_{50}-L_{55}}{L_{40}}$$

$$=\frac{L_{55}}{L_{40}}\left[\left(\frac{L_{40}}{L_{45}}-1\right)+\left(\frac{L_{45}}{L_{50}}-1\right)\right]+\frac{L_{50}}{L_{40}}-\frac{L_{55}}{L_{40}}$$

$$=\frac{L_{55}}{L_{40}}\left[\frac{L_{40}}{L_{45}}-1+\frac{L_{45}}{L_{50}}-1-1\right]+\frac{L_{50}}{L_{40}}$$

$$=\frac{L_{55}}{L_{40}}\left[\frac{L_{40}}{L_{45}}+\frac{L_{45}}{L_{50}}-3\right]+\frac{L_{50}}{L_{40}}$$

$$=\frac{60363}{71733}\left[\frac{71733}{68578}+\frac{68578}{64882}-3\right]+\frac{64882}{71733}$$

$$=0.841495546[1.046006008+1.056964952-3]+0.90449305$$

$$=0.841495546[-0.89702904]+0.0.90449305$$

$$=-0.055533494+0.90449305$$

$$=0.848959556$$

4.5- توقع الحياة: Expectation of life

وهو من المفاهيم الهامة بالنسبة لعمل شركات التأمين فيما يتعلق بإصدار وثـائق التأمين على الحياة ، ويشير إلى متوسط عدد السنوات التي يمكن أن يعيشها شـخص موجود الآن على العمر X.

وهنا يجري التمييز بين توقع الحياة الناقص و توقع الحياة الكامل:

أ– توقع الحياة الناقص Curate Expectation:

عند حسابه تؤخذ بعين الاعتبار فقط السنوات الكاملة و تهمل الكسور في السنوات. وفي هذه الحالة لدينا افتراضان اثنان:

الافتراض الأول: أن الوفاة تحدث بداية كل سنة ، وسنرمز لهذا بالرمز E_x^{cu1} .

من أجل الحصول على E_x^{cu1} يتم تتبع L_x شخصاً ونسجل عدد السنوات الكاملة التي يعيشها L_x مستقبلاً وحتى يتوفوا جميعاً وذلك انتهاءً بآخر عمر ω .

وهنا نلاحظ أنه من L_x شخصاً يعيش L_{x+1} شخصاً لمدة سنة كاملة حتى يصلوا العمر $x+1$.

و من بين L_{x+1} شخصاً يعيش L_{x+2} شخصاً لمدة سنة كاملة حتى يصلوا العمر $x+2$ وهكذا،

من بين $L_{\omega-1}$ يعيش L_ω لمدة سنة كاملة ليبلغوا العمر ω وبالتالي فإنّ:

$$E_x^{cu1} = \frac{L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots.. + L_{\omega-1} + L_\omega}{L_x}$$

الافتراض الثاني: أن الوفاة تحدث في نهاية كل سنة، سنرمز لهذا بالرمز E_x^{cu2} .من أجل الحصول على E_x^{cu2} ننطلق مما عرضناه نفسه وفق الافتراض الأول، مع اختلاف واحد وهو أننا نبدأ بجميع الأحياء L_x في البسط:

$$E_x^{cu2} = \frac{L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots.. + L_{\omega-1} + L_\omega}{L_x}$$

II- توقع الحياة الكامل Complete Expectation :

ووفقاً له ، يفترض أن الوفيات تحدث في منتصف السنة ، سنرمز لتوقع الحياة الكامل بالرمز E_x^{com} ونحصل عليه بأخذ متوسط E_x^{cu1} و E_x^{cu2} ، أي:

$$E_x^{com} = \left(E_x^{cu1} + E_x^{cu2}\right)/2$$

$$= \left[\frac{L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots + L\omega}{L_x} + \frac{L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots + L\omega}{L_x}\right]/2$$

$$= \left[1 + 2\left(\frac{L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots + L\omega}{L_x}\right)\right]/2$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + 2\left(\frac{L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots + L\omega}{L_x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots + L\omega}{L_x}$$

$$\boxed{E_x^{com} = 0.5 + E_x^{cul}}$$

مثال:

ليكن لدينا الجدول التالي، المتضمن حقلي العمر x وعدد الأحياء L_x :

x :	95	96	97	98	99	100
L_x	125	112	99	42	14	4

والمطلوب حساب:

1 توقع الحياة للعمر 95 بافتراض أن الوفاة تحدث بداية كل سنة.

2- توقع الحياة للعمر 95 بافتراض أن الوفاة تحدث نهاية كل سنة.

3- توقع الحياة للعمر 95 بافتراض أن الوفاة تحدث في منتصف كل سنة.

الحل:

1- بافتراض أن الوفاة تحدث بداية كل سنة، وهذا يعني توقع حياة ناقص E_x^{cu1}، وبالتالي:

$$E_x^{cul} = \frac{L_{x+1} + L_{x+2} + \ldots . + L_{\omega}}{L_x}$$

$$E_{95}^{cul} = \frac{L_{96} + L_{97} + \ldots . + L_{100}}{L_{95}}$$

$$= \frac{112 + 99 + 42 + 14 + 4}{125} = \frac{271}{125}$$

$= 2.168$ سنة

2- بافتراض أن الوفاة تحدث نهاية كل سنة، وهذا يعني المطلوب توقع حياة ناقص E_x^{cu2}،وبالتالي:

$$E_x^{cu2} = \frac{L_x + L_{x+1} + \ldots + L_{\omega}}{L_x}$$

$$E_{95}^{cu2} = \frac{L_{95} + L_{96} + \ldots + L_{100}}{L_{95}}$$

$$= \frac{125 + 112 + 99 + 42 + 14 + 4}{125} = \frac{396}{125}$$

$E_x^{cu2} = 3.168$ سنة

3- بافتراض أن الوفاة تحدث في منتصف كل سنة، والتوقع هنا توقع كامل:

: E_x^{com}

$$E_x^{com} = 0.5 + E^{cu1}$$

$$E_{95}^{com} = 0.5 + E_{95}^{cul}$$

$$= 0.5 + 2.168$$

$= 2.668$ سنة

4.6- المعدل الآني للوفاة والحياة:

بافتراض أن L_x تابع مستمر بالنسبة للمتحول x وقابل للاشتقاق على مجال تغير هذا المتحول.

بعد مرور فترة زمنية جزئية مقدارها Δ_x يبقى من الأشخاص L_x، $L_{x+\Delta_x}$ شخصاً، وبالتالي يكون عدد الوفيات مساوياً إلى: $L_x - L_{x+\Delta_x}$، أما عدد الوفيات وسطياً فيساوي إلى:

$$= \frac{L_x - L_{x+\Delta_x}}{\Delta_x}$$

$$= \frac{-\left(L_{x+\Delta_x} - L_x\right)}{\Delta_x} \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta_x \to o} \frac{-\left(L_{x+\Delta_x} - L_x\right)}{\Delta_x} = -\frac{dL_x}{d_x} = -L'_x$$

وبالتالي، بنسبة المشتق $-L'_x$ إلى L_x نحصل على:

$$\boxed{\mu_x = \frac{-L'_x}{L_x}}$$

وهو المعدل الآني للوفاة، أي الاحتمال الآني (اللحظي) لوفاة شخص عمره x خلال عام، وهو مستمر بتغيراته تبعاً لـ x.

أما المقدار $-L'_x$ فهو يشير إلى عدد الوفيات الآني في وحدة الزمن، وهي هنا تساوي السنة، وهو مستمر بتغيراته تبعاً لـ x.

عادة ما يتم إرفاق قيم μ_x في حقل مستقل في جـــداول الحيـــاة والوفـــاة، إذ إنّ استخدامات هذا المعدل مهمة و كثيرة في إطار حساب الأقساط الوحيدة الـــصافية في التأمين على أكثر من شخص (العمر التو أمي).

ويجب أن نشير إلى أن المعدل الآني للوفاة يعكس في الواقع جزأين اثنين:

الجزء الأول منـه: وهو ثابت بالنسبة للأعمار كافة x ويمثّل تأثُّر حياة كل البشر بعامل القدر الذي يكون مسبّباً لموت أي شخص بغض النظر عـــن كونـــه صـــحيحاً أومريضاً .

أما الجزء الثاني منه: وهو يمثل تأثير عامل الشيخوخة الذي يضعف الإنسان بشكل طردي كلما تقدم في العمر (وفق تابع أسّي). إذا رمزنا بـــ β_x لمقلوب المعـــدل الآني للوفاة ، أي:

$$\boxed{\beta_x = \frac{1}{\mu_x} = \frac{L_x}{-L'_x}}$$

فنكون أمام ما يطلق عليه المعدل الآني للحياة أو قوة الحياة، وهو يعبر عن إمكانية أن يبقى الشخص الموجود على العمر x على قيد الحياة حتى يموت .

وبعبارةٍ أخرى، يشير إلى المدة الزمنية اللازمة لانقراض الـــ L_x شخصاً في ظـــل ثبات لمعدل الوفيات.

4.7- تمارين غير محلولة

1- احسب احتمال بقاء شخص عمره 25 عاماً على قيد الحيـــاة لمـــدة عـــشر سنوات .

2- احسب احتمال وفاة شخص عمره 30 عاماً خلال خمس عشرة سنة.

3-احسب احتمال وفاة رجل عمره 50 عاماً بين سن الـــستين و الخامـــسة و الستين.

4- احسب احتمال بقاء الشخصين معاً على قيد الحياة خلال عشر ســنوات إذا علمت أن أعمارهم هي 50 سنة و 45 سنة.

5-احسب بقاء الزوج (30 سنة) على قيد الحياة خلال عشر ســنوات و وفـــاة زوجته (25 سنة) خلال عشر السنوات، ثم احسب الاحتمال المعاكس (وفاة الزوج خلال عشر سنوات و بقاء الزوجة على قيد الحياة خلال تلك الفترة).

6-شخص عمره 45 عاماً المطلوب حساب:

احتمال وفاته خلال عشر السنوات القادمة

احتمال وفاته خلال الأربعين سنة القادمة

جـــ- احتمال وفاته خلال السنة القادمة

احتمال وفاته خلال الفترة الزمنية (10,15) أي حساب احتمال وفاته بين ســن الخامسة و الخمسين و الستين من العمر .

احتمال وفاته هو و زوجته (30 عاماً) معاً خلال عشر السنوات القادمة

احتمال وفاته هو و بقاء زوجته على قيد الحياة خلال عشر السنوات القادمة

احتمال بقائه هو على قيد الحياة و وفاة زوجته خلال عشر السنوات القادمة

احتمال بقائهما معاً على قيد الحياة خلال عشر السنوات القادمة

احتمال بقاء واحد على الأقل على قيد الحياة خلال عشر السنوات القادمة

7- شاب عمره الآن 21 عاماً احسب:

احتمال حياته لمدة خمس عشرة سنة قادمة و وفاته خلال خمس السنوات التالية

احتمال حياته لمدة خمس سنوات ثم وفاته خلال خمس السنوات التالية

جـ- احتمال حياته حتى وصوله لسن السبعين ثم وفاته خلال السنتين التاليتين

8- أربعة أخوة أعمارهم على الترتيب 20، 23، 30، 33 إذا فرضت أن احتمال بقائهم جميعاً على قيد الحياة لمدة عشر سنوات يساوي 0.25 أوجد احتمال وفاة الأخ :

الأصغر قبل بلوغه الخمسين من العمر (في أي لحظة)

الأكبر قبل بلوغه الخمسين من العمر (في أي لحظة)

و احسب بالضبط :

أ- احتمال حياة الأربعة معاً لمدة عشر سنوات

ب- احتمال وفاة واحد فقط خلال عشر سنوات

جـ- احتمال وفاة اثنين منهم فقط خلال عشر سنوات

احتمال بقاء واحد منهم على قيد الحياة خلال عشر السنوات

9- بالرجوع إلى جدول الحياة و باستخدام بيانات X و Lx (فقط) احسب ما يلي :

أ- توقع الحياة للعمر 65 بافتراض أن الوفاة تحدث في بداية كل سنة.

ب- توقع الحياة للعمر 65 بافتراض أن الوفاة تحدث في نهاية كل سنة.

جـ- توقع الحياة للعمر 65 بافتراض أن الوفاة تحدث في منتصف كل سنة.

الفصل الخامس

جداول الرموز الحسابية

أوجداول الاســـــــتعاضة أوجداول الاستبـــــدال

Commutation Table

5.1- تعريف بجداول الرموز الحسابية

5.2 - معدل الفائدة الفنّي

5.3- مكونات جداول الرموز الحسابية

الفصل الخامس

جداول الرموز الحسابية

أوجداول الاســــــتعاضة أوجداول الاستبـــــدال

كما سنجد لاحقاً أنه يلزم لحساب التكلفة الصافية للتأمين (القسط الــصافي) استخدام جدولين هما جدول الحياة وجدول القيمة الحالية (الجداول المالية)، وتــسهيلاً للعمليات الحسابية أعدت جداول الرموز الحسابية التي تعتمد على بيانات الجــدولين السابقين.

5.1– تعريف بجداول الرموز الحسابية:

جداول الرموز الحسابية أو كما يطلق عليها أيضاً جداول أعداد الاستعاضة أو جداول الاستبدال أو غير ذلك، هي بمثابة جداول للحياة ولكن محسوبة على أساس أنها قيم حالية لمبالغ محددة يستحق دفعها بعد مدة معينة هي المدة التي يؤثر عليها العمــر x الخاص بكل عدد منها.

وعلى الرغم من أنه يمكن الوصول إلى تحديد قيمة القسط في تأمينات الحيــاة بالاستعانة بفكرة التوقع الرياضي Mathematical Expectation، إلاّ أن الاعتماد على جداول الرموز الحسابية يسهّل ويبسّط ويسرّع الوصول إلى قيمة الأقساط أكثر. فهذه الجداول لا تظهر عدد الأحياء أو عدد الوفيات مخصومة بمعدل خــصم معــين، ولكن توضح القيمة الحالية للمبالغ التي ستسدد كأقساط وكتعويضات.

نذكر مثلاً، إذا كان لدينا $L_{15} = 88235$ ، فمن غير المعقول خصم هذا العــدد كأحياء بمعدل فائدة معينة، ولكن إذا فرضنا أن الشخص الموجود على هــذا العمــر يساهم بوحدة نقدية واحدة كقسط تأمين، فإن القيمة الحالية في تــــاريخ ميلاد

الشخص x للأقساط المحصلة يساوي إلى حاصل ضرب وحدة النقد في عدد الأحياء عند السن 15 (وهو L_{15}) في القيمة الحالية لوحدة النقد التي تستحق السداد في نهاية الفترة الفاصلة بين تاريخ ميلاد الشخص وبين العمر x. (وهو u^{-n})، حيث $u=1+i$ و ذلك وفق معدل فائدة سنوية i وليكن 5%.

$$=1.L_{15}u^{-n}$$

$$= 88235\ (1.05)^{-15} = 42442\ .544$$ وحدة نقدية

وهي القيمة الحالية في تاريخ ميلاد المستأمن للأقساط المحصلة.

وكذلك بافتراض أن كل شخص يبقى على قيد الحياة حتى بلوغ العمر $x=45$، يحصل على مبلغ تأمين يعادل 10000 ل.س، فإن القيمة الحالية في تاريخ ميلاد المستأمن الموجود على العمر $x=15$ لمبالغ التأمين هي:

$$= 10000\ L_{15} \cdot u^{-45}$$

$$= 10000 \cdot 84944\ (0.11129651\ )$$

$$= 94539706\ .53$$ ل.س

وذلك بمعدل فائدة 5%.

5.2- معدل الفائدة الفنّي:

كما سنجد لاحقاً، إن معدل الفائدة الفني هو من العناصر الأساسية التي يعتمد عليها في حساب تكلفة وثائق التأمين (حساب الأقساط) بالإضافة إلى احتمالات الحياة والوفاة ومبلغ التأمين ومعدل المصروفات الإدارية.

الشيء الأساسي في حساب تكلفة التأمين على الحياة هو ما تقوم به شركة التأمين في معادلة القيمة الحالية للمزايا التأمينية التي ينص عليها العقد بالقيمة الحالية للأقساط التي يلتزم بدفعها المؤمن له عند توقيعه العقد. هذه القيم الحالية ترتبط بمعدل

فائدة i تحدد وتحسب على أساسه ويطلق عليه معدل الفائدة الفني (يختلف هذا المعدل عن المعدل الفني الذي تحسب على أساسه الاحتياطات).

إن تحديد معدل الفائدة الفني هو أمرٌ يستند إلى معدل الاستثمار العام الذي تستثمر به الشركة احتياطاتها المختلفة في الأقنية الاستثمارية المتعددة.

وبشكل عام يمكن القول بوجود علاقة طردية بين معدل الفائدة الفني ومعدل الاستثمار العام، إذ يكون معدل الفائدة الفني دائماً أقل من معدل الاستثمار العام، فإذا كان الثاني لدى الشركة يساوي 4% فهذا يعني أنه يمكن حساب الأقساط على أساس معدل فائدة فني يعادل 2.5% أو 3%، وبالتالي يمثل الفارق بين المعدّلين مصدراً من مصادر الفوائض المالية والاستثمارية التي يمكن أن تحققها الشركة لدعم وضعها المالي.

إن اختيار معدل الفائدة الفني هو مسألة يتوقف عليها نشاط الشركة ومدى قدرتها على التوسع والمنافسة والاستمرارية وهذا يتحقق من خلال ما تستطيع الشركة تأمينه من عدالة بين طرفي عقد التأمين من خلال معدل الفائدة الفني من جهة وبين قيمة القسط المطلوب تسديده (ويدل على ذلك مباشرة الأس السالب في المقدار u^{-n} المستخدم في عملية الخصم أو إيجاد القيمة الحالية).

إذاً، كلما ازدادت فرص الاستثمار وارتفع العائد المتحقق لدى شركات التأمين، كلما تسنّى لها إمكانية رفع معدل الفائدة الفني لديها، وبالتالي تخفيض تكلفة ما تسوّقه من تأمين. إلا أنه تاريخياً معظم شركات التأمين الأوربية وحتى الحرب العالمية الثانية كانت تستخدم معدل فائدة فني 3.5 % سنوياً، أما بعد ذلك وخاصة الآن فإن هذا المعدل انخفض إلى 2.5% سنوياً.

بشكل عام، لقد جرت العادة على أن يتراوح معدل الفائدة الفني في معظم شركات التأمين بين 2% و 3.5% سنوياً.

إن تجسيد استخدام معدل الفائدة الفني في حساب الأقساط، يتحقق من خلال مفردات جداول الرموز الحسابية الذي سنعرض مكوناته لاحقاً، فمعدل الفائدة الذي يجري استخدامه وذكره في حساب قيم جداول الرموز الحسابية، مقصود فيه معدل الفائدة الفني.

5.3- مكونات جدول الرموز الحسابية:

يتكون جدول الرموز الحسابية عادة من سبعة حقول هي التالية:

الحقل الأول: العمر x

وهو يبدأ بالعمر الصفري وينتهي بالعمر 99 أو 100 أو 101 ، حيث يتفق ذلك مع بداية ونهاية حقل العمر في جدول الحياة والوفاة.

الحقل الثاني: ويأخذ الرمز D_x

ويتضمن القيمة الحالية للمبالغ المستحقة السداد في نهاية الفترة الزمنية المحصورة بين تاريخ ميلاد المؤمن عليه x (المستأمن) وبين العمر x وذلك بمعدل فائدة مركبة سنوي معمول فيه i، أي:

$$\boxed{D_x = 1.L_x.u^{-x}}$$

حيث:

1 - هو وحدة نقدية واحدة

L_x - عدد الأشخاص الباقين على قيد الحياة والذين بلغوا العمر x.

u^{-x} - القيمة الحالية لوحدة نقدية واحدة تستحق السداد في آخر الفترة الزمنية الممتدة من تاريخ ولادة المؤمن عليهم وحتى بلوغهم العمر x بمعدل فائدة i، حيث:

$$u = 1 + i$$

فمن أجل العمر $x = 42$ يمكن أن نكتب مثلاً:

$$D_{42} = L_{42}.u^{-42}$$

$$= 70521\ (0.235779101\ )$$

$$= 16627.378$$ وحدة نقدية

الحقل الثالث: ويأخذ الرمز N_x :

وهو يشير إلى حاصل الجمع التالي:

$$\boxed{N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega = \sum_{j=x}^{\omega} D_j}$$

وهكذا فإن:

$$N_{x+n} = D_{x+n} + D_{x+n+1} + \ldots + D_\omega$$

هذا يعني أنً:

$$N_x - N_{x+n} = [D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega] - [D_{x+n} + D_{x+n+1} + \ldots + D_\omega]$$

$$= D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1}$$

وبنقل N_{x+n} إلى الطرف الأيمن نجد:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1} + N_{x+n}$$

$$\boxed{N_x = D_x + N_{x+1}}$$

فيمكن أن نكتب على سبيل المثال:

$$N_{30} = D_{30} + D_{31} + D_{32} + \ldots + D_\omega$$

$$= D_{30} + N_{31}$$

الحقل الرابع: ويعنون بالرمز S_x :

ويعبر عن صيغة الجمع التالية:

$$S_x = N_x + N_{x+1} + \ldots + N_\omega = \sum_{j=x}^{\omega} N_j$$

على سبيل المثال:

$$S_{36} = N_{36} + N_{37} + \ldots + N_\omega$$

وأيضاً:

$$S_{x+n} = N_{x+n} + N_{x+n+1} + \ldots + N_\omega$$

وبالتالي:

$$S_x - S_{x+n} = [N_x + N_{x+1} + \ldots + N_\omega] - [N_{x+n} + N_{x+n+1} + .. + N_\omega]$$

$$= N_x + N_{x+1} + \ldots + N_{x+n-1}$$

وبنقل S_{x+n} إلى الطرف الأيمن نجد:

$$S_x = N_x + S_{x+1}$$

الحقل الخامس: عنوانه C_x :

ويحسب بأسلوب D_x نفسه ولكن على أساس عدد الوفيات وليس عدد الأحياء، كما أن القيمة الحالية تخصم لمدة $x+1$ بدلاً من x .بمعدل فائدة i باعتبار أن مبلغ تأمين الوفاة يستحق في نهاية السنة التي تحدث فيها الوفاة أي أن:

$$C_x = d_x . u^{-(x+1)}$$

حيث: $d_x -$ عدد الوفيات بين العمر $x+1$ والعمر x ، و بالتالي:

$$C_x = (L_x - L_{x+1}) \cdot u^{-(x+1)}$$

$$= L_x \cdot u^{-(x+1)} - L_{x+1} \cdot u^{-(x+1)}$$
$$= u^{-1}.L_x.u^{-x} - D_{x+1}$$
$$C_x = u^{-1} \cdot D_x - D_{x+1}$$

مثال:

أوجد قيمة C_{30} بمعدل فائدة 3.5% دون استخدام لأي جدول من جداول الرموز الحسابية.

الحل:

$$C_x = d_x \cdot u^{-(x+1)}$$
$$C_{30} = d_{30} \cdot (1.035)^{-31} = 513(0.344230348) = 176.59017$$

وهي القيمة الموجودة في جدول الرموز الحسابية نفسها. أما القيمة d_{30} فقد أخذت من جدول الحياة والوفاة.

مثال:

إذا كانت القيمة الحالية لوحدة النقد لمدة سنة بمعدل 3.5% هي 0.96618357 ، وأن $c_{20} = 275.80427$ ، $D_{21} = 39742.522$

المطلوب إيجاد قيمة D_{20}

الحل:

العلاقة بين c_x و D_x تعطى بالصيغة:

$$c_x = u^{-1}.D_x - D_{x+1}$$
$$C_{20} = u^{-1}.D_{20} - D_{21} \Rightarrow$$
$$D_{20} = (C_{20} + D_{21})/u^{-1}$$
$$= (10 + 5744)/0.97561$$

$$= 5897.84853$$

وهكذا نجد أن:

$$C_\omega = d_\omega \cdot u^{-(\omega+1)}$$

$$C_\omega = d_\omega \cdot u^{-0}$$

وبالتالي:

$$C_\omega = d_\omega$$

وهنا نشير إلى أنه يتم إنشاء هذا الحقل في بعـــض الجـــداول علـــى الأســـاس $C_x = d_x \cdot u^{-(x+\frac{1}{2})}$ ، أي أن الدفع من قبل شركة التأمين يتم في منتصف العام ولـــيس في نهايته

الحقــــل السادس: M_x

وهو مجموع القيم الموجودة في الحقل C_x اعتباراً من العمر x وحتى ω،

وبالتالي فإن M_x يعطى بالصيغة:

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots + C_\omega = \sum_{j=x}^{\omega} C_j$$

$$M_{x+n} = C_{x+n} + C_{x+n+1} + \ldots + C_\omega$$

$$M_{x+m} = C_{x+m} + C_{x+m+1} + \ldots + C_\omega$$

و بالتالي:

$$M_x - M_{x+m} = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+m-1}$$

مثال:

إذا علمت بأن:

$$C_{94}=4\ ;\ C_{95}=3\ ;\ C_{96}=3\ ;\ C_{97}=2\ ;\ C_{98}=2\ ;\ C_{99}=1$$

أوجد M_{94} .

الحل:

$$M_x = C_x + C_{x+1} + ... + C_\omega$$

$$M_{94} = C_{94} + C_{95} + C_{96} + ... + C_{99}$$

$$= 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 = 15$$

الحقل السابع: R_x

وهو يمثل مجموع القيم الموجودة في حقل M_x :

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + ... + M_\omega = \sum_{j=x}^{\omega} M_j$$

$$R_{x+n} = M_{x+n} + M_{x+n+1} + ... + M_\omega$$

وبالتالي:

$$R_x - R_{x+n} = M_x + M_{x+1} + ... + M_{x+n-1}$$

وهكذا فإن:

$$R_{50} = M_{50} + M_{51} + ... + M_\omega$$

لقد أوردنا في الملحق رقم (4) نموذجاً لجدول الرموز الحسابية المبني على أساس حقول جدول الحياة والوفاة الوارد في الملحق رقم (3) . إن معدل الفائدة الفني المعتمد في حسابات جدول الرموز الحسابية هو 3.5%، وسوف نعتمد هذا الجدول في حسابات الأقساط المختلفة لتأمينات الحياة في الفصول اللاحقة.

الفصل السادس

أسس حساب أقساط التأمين

6.1- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين الوقفية البحتة

6.2- الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق تأمين دفعات الحياة

6.3 – الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق تأمين دفعات دورية جزئية

6.4- تمارين غير محلولة

الفصل السادس

أسس حساب أقساط التأمين

تختلف العناصر التي يجري الاستناد إليها في عمليات حساب أقساط التأمين تبعاً لنوعية التأمين. في هذا الإطار نميز بين ما يلزم لتأمينات الحياة وما يلزم لتأمينات الممتلكات والمسؤولية.

1– بالنسبة لتأمينات الحياة، تحسب الأقساط استناداً إلى العناصر التالية:

أ- احتمال الحياة أو الوفاة، وقد تم تضمين هذا الاحتمال في جداول الحياة والوفاة. ففي تأمينات الحياة، أي الوثائق التي تضمن حصول المؤمن عليه بنفسه على مبلغ معين أو عدة مبالغ سنوية بشرط بقائه على الحياة لمدة معينة، نلاحظ وجود علاقة عكسية تربط احتمال الحياة P_x بالعمر x وبالتالي يقل قسط التأمين كلما زاد العمر عند شراء وثيقة التأمين.

في حين، في وثائق تأمين الوفاة، أي الوثائق التي تضمن دفع مبلغ التأمين للورثة (المستفيدين)، نلاحظ وجود علاقة طردية بين احتمال الوفاة q_x والعمر x، وبالتالي يزداد قسط التأمين كلما زاد العمر عند شراء وثيقة التأمين.

ب- مبلغ التأمين، وهو المبلغ الذي يلتزم بدفعه المؤمن للمؤمن عليه أوللمستفيد، حيث توجد علاقة طردية بين مبلغ التأمين وقيمة قسط التأمين.

ج- معدل الفائدة الفني، وقد سبق وتحدثنا عنه.

د- معدل المصاريف الإدارية، وهي تضاف على قسط التأمين فتشكل قيمة القسط التجاري (القسط واجب السداد)، و توجد علاقة طردية بين معدل المصاريف الإدارية وبين قيمة القسط، ويكون هذا المعدل في تأمينات الحياة أقل مقارنة به في تأمينات الممتلكات والمسؤولية وذلك بسبب انخفاض أو عدم وجود بند العمولة.

2- بالنسبة لتأمينات الممتلكات والمسؤولية، تحدد العناصر التي على أساسها تحسب الأقساط بـ:

أ- احتمال وقوع الخطر.

ب- مبلغ التأمين (التعويض، وهو بحده الأقصى لا يتجاوز مبلغ التأمين).

ج- قيمة الشيء موضوع التأمين.

د- العوامل المساعدة لوقوع الخطر.

سنتناول في الفصول اللاحقة وبالتفصيل كيفية حساب الأقساط الصافية والتجارية لوثائق تأمين الحياة والوفاة والتأمين المختلط. ونترك كيفية حساب الأقساط لوثائق تأمين الممتلكات والمسؤولية لعرضها في فصول خارج ما هو مخصص لعرضه في هذا الكتاب.

6.1- الأقساط الوحيدة الصافية للوثائق التي بموجبها تدفع مبالغ التأمين في حالة الحياة فقط

الأقساط الوحيدة الصافية ليست سوى القيم الحالية للمبالغ والدفعات التي يرتبط سدادها ببقاء أشخاص معينين على قيد الحياة أو وفاتهم.

وبصيغة أخرى، يمثل القسط الوحيد القيمة الحالية لالتزام شركة التأمين قبل المؤمن له عند شراء الوثيقة أو عند توقيع العقد، مع مراعاة أن سداد هذا الالتزام لن يكون إلا بتحقق الشروط المنصوص عليها في العقد بخصوص بلوغ المؤمن عليه لعمر معين أو وفاته في عمرٍ معين وهكذا...

وهنا نشير إلى أنه ، وحتى تكون القيمة الحالية للالتزام موضوعية ومنطقية، يجب أن تكون جداول الحياة والوفاة المستخدمة في حسابها تمثل بدقة المجتمع الذي تعمل شركة التأمين في إطاره، وأن تقوم الشركة باستمرار باستثمار الأقساط التي تحصِّلها بمعدل استثمار عام يعادل على الأقل معدل الفائدة الفني، بالإضافة إلى أن تكون

الأقساط المحصلة مضافاً إليها عوائد الاستثمار كافية لسداد الالتزامات لحملة وثائق التأمين والمستفيدين .

6.1.1- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين الوقفية البحتة:

وفقاً لوثيقة أو عقد الوقفية البحتة **Pure Endowment** تلتزم شركة التأمين بأن تدفع المبلغ المنصوص عليه في العقد للمؤمن عليه في حال بقائه على قيد الحياة حتى نهاية فترة التأمين ، وأما في حالة وفاته قبل انتهاء مدة التعاقد فلا تدفع الشركة أي شيء للورثة،أما الالتزامات المترتبة على المؤمن عليه فهي دفع قسط التأمين عند توقيع العقد.

إذاً، يفهم من تسمية الوقفية البحتة، أن استحقاق مبلغ التأمين متوقف على بقاء المؤمن عليه حياً حتى نهاية مدة العقد.

نرمز بالرمز nE_x للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وقفية تلتزم وفقها شركة التأمين بدفع مبلغ قدره وحدة نقدية واحدة إلى المستأمن (المؤمن له أو المؤمن عليه) الموجود على العمر x وذلك إذا بقي على قيد الحياة ،بعد مرور n سنة وإذا توفي قبل مرور n سنة ، فلا يترتب على شركة التأمين أية التزامات.

لإيجاد nE_x ننطلق من قاعدة التكلفة التالية:

[1] ***القيمة الحالية للالتزامات المتوقعة لشركة التأمين = التزامات المستأمنين.***

ولحساب التزامات المستأمنين، نفترض وجود L_x مستأمن مشارك في عملية التأمين بحيث يدفع كل منهم عند توقيع العقد مبلغ nE_x

ولحساب الإلتزامات المتوقعة للشركة بعد مرور n سنة ، نفترض أنه ستكون وحدة نقدية واحدة لكل مستأمن بقي على قيد الحياة من L_x شخص، أي L_{x+n} وحدة نقدية والتي قيمتها الحالية عند توقيع العقد هي $L_{x+n}.u^{-n}$

إذا، بالتعويض في قاعدة التكلفة نجد:

$$L_x . nE_x = L_{x+n} . u^{-n}$$

ومنه نجد أن:

$$nE_x = \frac{L_{x+n}}{L_x} . u^{-n} \qquad [2]$$

$$nE_x = nP_x . u^{-n} \qquad [3]$$

ويمكن الوصول إلى صيغة أخرى بضرب البسط والمقام في العلاقة [2] بالمقدار u^{-x} كالتالي:

$$nE_x = \frac{L_{x+n} \cdot u^{-x}}{L_x \cdot u^{-x}} u^{-n} = \frac{L_{x+n} \cdot u^{-(x+n)}}{L_x \cdot u^{-x}}$$

نفترض أن: $\Leftarrow L_x \cdot u^{-x} = D_x$

$$\boxed{nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}} \qquad [4]$$

حيث وكما أسلفنا في الحديث عن جداول الرموز الحسابية، نجد قيم D_x المختلفة أمام كل عمر مقابل x

إذاً، القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وقفية بحتة تلتزم وفقها شركة التأمين بدفع مبلغ قدره C وحدة نقدية إلى المستأمن x إذا بقي حياً بعد مرور n عام هو:

$$C \cdot {}_nE_x = C \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad [5]$$

مثال:

احسب القسط الوحيد الصافي الذي يدفعه شخص عمره 40 سنة ليحصل على وثيقة تأمين وقفية بحتة قيمتها 100000 ل.س ولمدة خمسة عشر عاماً.

الحل:

من البيانات المعطاة نجد أن:

$$x = 40 \quad n = 15 \quad C = 100000$$

والمطلوب هو إيجاد القيمة $C \cdot nE_x$ ، حيث:

$$C \cdot {}_nE_x = C \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$100000\,{}_{15}E_{40} = 100000\frac{D_{55}}{D_{40}}$$

وبالرجوع إلى جدول الرموز الحسابية الموجودة في الملحق رقم (3) والتعويض بقيم D_{55} و D_{40} نجد أن:

$$100000\,{}_{15}E_{40} = 100000\frac{9100.2134}{18117.781}$$

$$= 50228.08 \quad \text{ل.س}$$

حل آخر للمثال:

(في هذا المثال وفي الأمثلة اللاحقة كافة وعندما لا يذكر معدل الفائدة فهذا يعني أن المعدل 3.5%)

باستخدام العلاقة [3] :

$$nE_x = n\mathrm{P}_x \cdot u^{-n}$$

وهو القسط الوحيد الصافي من أجل مبلغ وحدة نقدية واحدة. ومن أجل 100000 وحدة نقدية يكون:

$$100000\,{}_{15}E_{40} = {}_{15}\mathrm{P}_{40} \cdot u^{-15} \ast 100000$$

$$= 100000\frac{L_{40+15}}{L_{40}}(1+0.035)^{-15} = 100000\frac{L_{55}}{L_{40}}(1.035)^{-15}$$

وبالرجوع إلى جدول الحياة والوفاة الموجود في الملحق (2) والتعويض بقيم L_{55} و L_{40} نجد أن:

$$100000\,{}_{15}E_{40} = 100000\frac{60363}{71733}(1.035)^{-15}$$

$$=100000(0.841495546)(0.596890618)$$
$$= 50228.08$$ ل.س

مثال:

اشترى شخص وثيقة تأمين لابنه البالغ عمره تسع سنوات، قيمتها 75000 ل.س، تستحق عند بلوغه تمام العمر خمس وعشرين سنة. احسب القسط الوحيد الصافي لتلك الوثيقة.

الحل:

لدينا هنا المعطيات التالية:

$$x=9 \qquad C=75000 \quad n=25-9=16$$

بالتالي نحن أمام وثيقة تأمين وقفية بحتة قسطها الوحيد الصافي:

$$C\cdot {}_nE_x = C\cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$75000\,{}_{16}E_9 = 75000\frac{D_{25}}{D_9}$$

$$=75000\frac{33715.506}{63838.263}$$

$$=39610.46$$ ل. س

مثال:

اشترى أحد الأشخاص وثيقة تأمين وقفية بحتة عندما كان عمــره 45 ســنة مقابل دفعه لقسط وحيد صافٍ قدره 15000 ل.س، حيث يستحق مبلغ التأمين عند بلوغه تمام العمر 60 سنة.أوجد قيمة مبلغ التأمين.

الحل:

لدينا: $x = 45 \quad n = 60 - 45 = 15 \quad ; \quad C \cdot {}_{15}E_{45} = 15000$

والمطلوب إيجاد قيمة C ، وبالتالي:

$$C \cdot {}_{15}E_{45} = C \frac{D_{60}}{D_{45}} = 15000$$

بالتعويض من الجدول في الملحق رقم(3) نجد أن:

$$C \frac{6938.2292}{14583.745} = 15000$$

وبالتالي فإن المبلغ المستحق عند بلوغه سن الستين من العمر يساوي:

$$C = \frac{15000}{0.475750858} = 31529.11$$ ل.س

6.1.2- الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق دفعات الحياة:

بموجب وثائق أو عقود دفعات الحياة يترتب على شركة التأمين أن تــدفع إلى المستأمن دفعات متساوية طيلة بقائه على قيد الحياة أو خلال فترة معينة مــن حياتــه بشرط بقائه حياً،حيث تتوقف تلك الدفعات بوفاة المستأمن.تختلف أنواع دفعات الحياة تبعاً لاختلاف مدة سريانها، ولاختلاف بدء سريانها ولاختلاف موعد استحقاق مبلغ الدفعة ، وبالتالي يمكننا أن نميز التالي:

1- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين دفعات عادية مدى الحياة:

لنرمز بـــ a_x للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها الشركة بدفع مبلغ قدره وحدة نقدية واحدة إلى المستأمن x وذلك في نهاية كل سنة تالية للحظة توقيـــع العقد(لبدء الزمن)وتستمر الدفعات طيلة بقاء المستأمن على قيد الحياة.

لإيجاد a_x ننطلق من قاعدة التكلفة السابق ذكرها:

القيمة الحالية للالتزامات المتوقعة لشركة التأمين=التزامات المستأمنين

لحساب التزامات المستأمنين،نفترض وجـــود L_x مـــستأمن مـــشارك في عمليـــة التأمين،بحيث يدفع كل منهم عند توقيع العقد مبلغ a_x وبالتالي تكون التزامـــات المستأمنين هي:

$$L_x \cdot a_x$$

ولحساب الالتزامات المتوقعة لشركة التأمين، نفترض أنها ستكون وحـــدة نقديـــة واحدة لكل مستأمن في نهاية كل سنة ابتداءً من لحظة توقيع العقد وتستمر الـــدفعات طيلـــــــــــــــــــــة بقائـــــــــــــــــــــــه علـــــــــــــــــــــــى قيد الحياة.وبالتالي، القيمة الحالية في لحظة توقيع العقد لتلك الدفعات هـــي مجمـــوع القيم الحالية لها، حيث:

* القيمة الحالية للالتزامات المتوقعة تساوي إلى:

$$L_{x+1} \cdot u^{-1} + L_{x+2} \cdot u^{-2} + \ldots + L_{\omega} \cdot u^{-(\omega - x)}$$

وبالتعويض في قاعدة التكلفة نجد أن:

$$L_x \cdot a_x = L_{x+1} \cdot u^{-1} + L_{x+2} \cdot u^{-2} + \ldots + L_{\omega} \cdot u^{-(\omega - x)}$$

$$a_x = \frac{L_{x+1} \cdot u^{-1} + L_{x+2} \cdot u^{-2} + \ldots + L_{\omega} \cdot u^{-(\omega - x)}}{L_x}$$

نضرب البسط والمقام بالمقدار u^{-x} فنحصل على:

$$a_x = \frac{L_{x+1} \cdot u^{-(x+1)} + L_{x+2} \cdot u^{-(x+2)} + \ldots + L_\omega \cdot u^{-\omega}}{L_x \cdot u^{-x}}$$

وبما أن : $L_x \cdot u^{-x} = D_x$ فنجد :

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega}{D_x}$$

وكما اصطلحنا في جداول الرموز الحسابية بأن:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega$$

فإن البسط ما هو إلا N_{x+1} وبالتالي:

$$\boxed{a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}} \qquad [6]$$

ومنه ،فإن القسط الوحيد الصافي عندما تكون قيمـــة الدفعـــة الواحـــدة c وحدة نقدية هو:

$$\boxed{c \cdot a_x = c\frac{N_{x+1}}{D_x}} \qquad [7]$$

هذا ويمكن الوصول إلى العلاقة [6] بشكل آخر، وكالتالي:

ننطلق من العلاقة:

$$a_x = \frac{L_{x+1} \cdot u^{-1} + L_{x+2} \cdot u^{-2} + \ldots + L_\omega \cdot u^{-(\omega-x)}}{L_x}$$

ومنه:

$$a_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}u^{-1} + \frac{L_{x+2}}{L_x}u^{-2} + \ldots + \frac{L_\omega}{L_x}u^{-(\omega-x)}$$

$$= P_x \cdot u^{-1} + {}_2P_x \cdot u^{-2} + \ldots + {}_{\omega-x}P_x \cdot u^{-(\omega-x)}$$

$$= {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_{(\omega-x)}E_x$$

$$= \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{D_\omega}{D_x}$$

$$= \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega}{D_x}$$

$$\boxed{a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}}$$

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافي لدفعات عادية مدى الحياة مبلغ كل منها 15000 ل.س لشخص عمره 40 سنة.

الحل:

لدينا: $x = 40$; $c = 15000$

والمطلوب هو: $c.a_x$ ،حيث:

$$c \cdot a_x = c \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$15000 \ a_{40} = 15000 \ \frac{N_{41}}{D_{40}}$$

$$= 15000 \ \frac{306729.23}{18117.781}$$

$$= 253946$$ ل.س

مثال:

اشترى شخص عمره 36 سنة وثيقة تأمين يتم بموجبها الحصول على دفعات قيمة كل منها 30000 ل.س،بحيث تستحق الأولى في نهاية السنة الأولى التالية لتوقيع العقد والثانية تستحق في نهاية السنة الثانية....وهكذا تستمر الدفعات طيلة بقاء الشخص على قيد الحياة.

أوجد القسط الوحيد الصافي.

الحل:

لدينا: $x = 36$; $c = 30000$

المطلوب هو: $c \cdot a_x$ ،حيث:

$$30000a_{36} = 30000\frac{N_{37}}{D_{36}}$$

$$= 30000\frac{384043.35}{21449.65}$$

$$= 537132.3$$ ل.س

2- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين دفعات فورية مدى الحياة:

لنرمز بـــ ∂_x للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها الشركة بتأديـــة دفعات دورية سنوية للمستأمن x كل منها وحدة نقدية واحدة، على أن تبدأ الدفعة الأولى في بدء الزمن(لحظة توقيع العقد)والثانية في بداية العام الثاني .... وهكذا تستمر الدفعات طيلة بقاء المستأمن x على قيد الحياة.

لإيجاد ∂_x ننطلق من قاعدة التكلفة السابقة وبالتالي، فإن:

$$L_x.\partial_x = L_x + L_{x+1}.u^{-1} + ... + L_{\omega-1}.u^{-(\omega-x-1)}$$

$$\partial_x = \frac{L_x + L_{x+1}.u^{-1} + ... + L_{\omega-1}.u^{-(\omega-x-1)}}{L_x}$$

بضرب البسط والمقام بالمقدار u^{-x} نحصل على:

$$\partial_x = \frac{L_x.u^{-x} + L_{x+1}.u^{-(x+1)} + ... + L_{\omega-1}.u^{-(\omega-1)}}{u^{-x}L_x}$$

وبما أن: $L_x.u^{-x} = D_x$ فإن :

$$\partial_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + ...}{D_x}$$

$$\boxed{\partial_x = \frac{N_x}{D_x}} \qquad [8]$$

وبالتالي فإن القسط الوحيد الصافي عندما تكون قيمة الدفعة الفورية الواحدة C وحدة نقدية هو:

$$C \cdot \partial_x = C \cdot \frac{N_x}{D_x} \qquad [9]$$

مثال:

احسب القسط الوحيد الصافي لدفعات حياة فورية مبلغ كل منها **20000** ل.س تستمر مدى الحياة بالنسبة لسيدة عمرها عند توقيع العقد **25** سنة.

الحـــل:

لدينـــا $x = 25 \quad ; \quad C = 20000$

والمطلوب هو $c.\partial_x$ ، حيث:

$$C \;.\; \partial_x = C.\ \frac{N_x}{D_x}$$

$$20000 \quad \partial_{25} = 20000\,\frac{N_{25}}{D_{25}}$$

$$= 20000 \frac{710318.29}{33715.506}$$

$$= 421360$$ ل.س

مثـــــال:

أعد الطلب الوارد في المثال السابق إذا علمت أن أول دفعة تتم في نهاية السنة التالية للحظة توقيع العقد.

الحـــــل:

نكون هنا أمام دفعات لمدى الحياة عادية، وبالتالي المطلــوب هــو $c.a_x$ ،

حيث:

$$20000 \quad a_{25} = 20000 \frac{N_{26}}{D_{25}}$$

$$= 20000 \frac{676602.78}{33715.506}$$

$$= 401360$$ ل.س

3- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين دفعات عادية مؤجّلة مدى الحياة:

لنرمز بـــ $_{m|}a_x$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها الشركة بتأدية دفعات دورية سنوية للمستأمن x قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة علـــى أن تبدأ الدفعة الأولى في نهاية السنة التالية لـــ m سنة تالية لبدء الزمن (للحظة توقيع العقد) وتستمر الدفعات طيلة بقاء المستأمن على قيد الحياة.

لحساب $_{m|}a_x$ ننطلق من قاعدة التكلفة السابقة وبالتالي فإن:

$$L_x.m|\ a_x = L_{x+m+1}.u^{-(m+1)} + L_{x+m+2}.u^{-(m+2)} + \ldots + L_{\omega}.u^{-(\omega-x)}$$

$$m|a_x = \frac{L_{x+m+1}.u^{-(m+1)} + L_{x+m+2}.u^{-(m+2)} + \ldots + L_{\omega}.u^{-(\omega-x)}}{L_x}$$

بضرب البسط والمقام بالمقدار u^{-x} نجد أن:

$$m|a_x = \frac{L_{x+m+1}.u^{-(x+m+1)} + L_{x+m+2}.u^{-(x+m+2)} + \ldots + L_{\omega}.u^{-\omega}}{L_x.u^{-x}}$$

وبما أن: $L_x.u^{-x} = D_x$ نجد أن:

$$m|a_x = \frac{D_{x+m+1} + D_{x+m+2} + \ldots + D_{\omega}}{D_x}$$

$$\boxed{m|a_x = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}} \qquad [10]$$

ومن أجل C وحدة نقدية كقيمة للدفعة الواحدة، يكون القسط الوحيد الصافي مساوياً إلى:

$$c.m|\ a_x = c.\frac{N_{x+m+1}}{D_x} \qquad [11]$$

مثال:

احسب القسط الوحيد الصافي لدفعات حياة عادية مؤجلة لمدة سبع سنوات، مبلغ كل منها 15000 ل.س لرجل عمره بتاريخ توقيع العقد 48 سنة.

الحـــــل:

لدينا $x = 48 \;\; ; \;\; c = 15000 \;\; ; \;\; m = 7$

والمطلوب هو $c.m|\ a_x$ حيث:

$$c.m|\ a_x = c\frac{N_{x+m+1}}{D_x}$$

$$15000 \quad {}_{7|}a_{48} = 15000 \frac{N_{56}}{D_{48}} = 15000 \frac{112802.15}{12743.812}$$

$$= 1327729 \quad \text{ل.س}$$

مثال:

أعد الطلب الوارد في المثال السابق من أجل رجل عمره 40 سنة بتاريخ توقيع العقد.

الحل:

لدينا هنا $x = 40$ بدلاً من 48 وبالتالي:

$$15000 \quad {}_{7|}a_{40} = 15000 \frac{N_{48}}{D_{40}} = 15000 \frac{199710.78}{18117.781}$$

$$= 165343.7 \quad \text{ل.س}$$

نلاحظ بالمقارنة مع المثال السابق، أنه كلما كان عمر المستأمن أقل كلما تطلب وجود قسط وحيد صاف أكبر، وذلك يعود إلى تركيبة جدول الرموز الحسابية المعتمدة فيها قيم D_x و N_x على احتمال الحياة p_x الذي يرتبط بشكل عام بعلاقة عكسية مع العمر x.

4 – القسط الوحيد الصافي لوثيقة دفعات فورية مؤجلة ولمدى الحياة:

لنرمز بـ $_{m|}\ddot{a}_x$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم الشركة بتأدية دفعات دورية سنوية للمستأمن x، قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة، حيث تستحق الدفعة

الأولى بعد m سنة تالية لبدء الزمن (للحظة توقيع العقد) ، وتستمر الدفعات طيلة بقاء المستأمن على قيد الحياة.

لإيجاد $m| \ddot{a}_x$ ننطلق من قاعدة التكلفة فنجد:

$$L_x \cdot m| \ddot{a}_x = L_{x+m} \cdot u^{-m} + L_{x+m+1} \cdot u^{-(m+1)} + \ldots + L_\omega \cdot u^{-(\omega-x)}$$

$$L_x \cdot m| \ddot{a}_x = \frac{L_{x+m} \cdot u^{-m} + L_{x+m+1} \cdot u^{-(m+1)} + \ldots + L_\omega \cdot u^{-(\omega-x)}}{L_x}$$

نضرب البسط u^{-x} ومع ملاحظة أن:

$$L_x \cdot u^{-x} = D_x$$

فإن:

$$\boxed{m| \ddot{a}_x = \frac{N_{x+m}}{D_X}} \qquad [12]$$

ومن أجل C وحدة نقدية لكل دفعة من تلك الدفعات، يكون القسط الوحيد الصافي مساوياً إلى:

$$C \cdot m| \ddot{a}_x = C \cdot \frac{N_{x+m}}{D_x} \qquad [13]$$

مثال:

اشترى شخص عمره 45 سنة وثيقة تأمين تؤهله للحصول على دفعات قيمة كل منها 100000 ل. س، بحيث تبدأ الدفعات بعد مرور خمس سنوات من بدء الزمن وتستمر طيلة بقائه على قيد الحياة. أوجد القسط الوحيد الصافي لتلك الوثيقة.

الحل:

لدينا $x = 45 \quad ; \quad C = 100000 \quad ; \quad m = 5$

والدفعات فورية وبالتالي:

$$C \cdot m| \ddot{a}_x = C \cdot \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

$$100000 \cdot {}_{5|} \ddot{a}_{45} = 100000 \ \frac{N_{50}}{D_{45}}$$

$$= 100000 \frac{174795.69}{14583.745}$$

$$= 1198565.2$$ ل.س

ويمكن أن نحل المثال باعتبار أن الدفعات هي عادية وذلك بأن نعتبر $m = 4$:

$$C \cdot {}_{m|} \ddot{a}_x = C \cdot \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$$

$$100000_{m|} \ a_{45} = 100000 \frac{N_{50}}{D_{45}}$$

$$= 100000 \frac{174795.69}{14583.745}$$

$$= 1198565.2$$

5 – القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين دفعات عادية مؤقتة(محددة):

لنرمز بـــ $a_{x\,\overline{n}|}$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم الشركة بموجبها بتأدية دفعات دورية سنوية عددها n وقيمة كل منها وحدة نقدية واحدة، حيث تبدأ الدفعة الأولى في نهاية السنة التالية لبدء الزمن (للحظة توقيع العقد). بتطبيق قاعدة التكلفة نجد:

$$L_x \cdot a_{x\,\overline{n}|} = L_{x+1} . u^{-1} + L_{x+2} . u^{-2} + \ldots + L_{x+n} . u^{-n}$$

$$a_{x\,\overline{n}|} = \frac{L_{x+1} \cdot u^{-1} + L_{x+2} \cdot u^{-2} + \ldots + L_{x+n} \cdot u^{-n}}{L_x}$$

نضرب البسط والمقام بالمقدار u^{-x} ومع ملاحظة أن $L_x . u^{-x} = D_x$ فنحصل على

$$a_{x\,\overline{n|}} = \frac{L_{x+1}\cdot u^{-(x+1)} + L_{x+2}\cdot u^{-(x+2)} + \ldots + L_{x+n}\cdot u^{-(x+n)}}{L_x \cdot u^{-x}} \quad :$$

بالتدقيق في البسط نلاحظ أنه ليساوي إلى:

$$= \left[D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{\omega}\right] - \left[D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + \ldots + D_{\omega}\right]$$

$$= N_{x+1} - N_{x+n+1}$$

وبالتالي فإن:

$$\boxed{a_{x\,\overline{n|}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}} \qquad [14]$$

ويمكن كتابة العلاقة الأخيرة بصيغة أخرى:

$$a_{x\,\overline{n|}} = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$\boxed{a_{x\,\overline{n|}} = a_x - {}_{n|}a_x} \qquad [15]$$

ومن أجل قيمة لكل دفعة تساوي C وحدة نقدية،يكون القسط الوحيد الصافي مساوياً إلى:

$$C \cdot a_{x\,\overline{n|}} = C \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \qquad [16]$$

مثال:

يرغب أحد الأشخاص بشراء وثيقة تأمين تتيح له الحصول على راتب سنوي مقداره70000 ل.س لحين إتمامه الخمسين من العمر.فإذا علمت أن عمر الشخص 36 سنة، فأوجد القسط الوحيد الصافي.

الحل:

لدينا:

$x=36$; $c = 70000$; $n=50-36=14$

الوثيقة، هي وثيقة تأمين دفعات عادية مؤقتة،أي لدينا 14 دفعة فقط،تبــدأ الأولى بعد مرور سنة من لحظة توقيع العقد.

القسط الوحيد الصافي هو $c\cdot a_{x\,\overline{n}|}$ ،حيث:

$$c\cdot a_{x\,\overline{n}|}=c\cdot\frac{N_{x+1}-N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$70000\,a_{36\,\overline{14}|}=70000\,\frac{N_{37}-N_{51}}{D_{36}}$$

$$=70000\frac{384043.35-163178.34}{21449.65}$$
$$=70000(10.29690508)$$

$$=720783.4$$ ل.س

6- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين دفعات فورية مؤقتة (محددة):

لنرمز بــ $\partial_{x\,\overline{n}|}$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبــها شــركة التأمين بتقديم n دفعة دورية سنوية للمستأمن x قيمة كل منها وحدة نقديــة واحدة، حيث تبدأ الدفعة الأولى في بدء الزمن(لحظة توقيع العقد).

بتطبيق قاعدة التكلفة السابقة، نجد:

$$L_x\cdot\partial_{x\,\overline{n}|}=L_x+L_{x+1}\cdot u^{-1}+\ldots+L_{x+n-1}\cdot u^{-(n-1)}$$

$$\partial_{x\,\overline{n}|}=\frac{L_x+L_{x+1}\cdot u^{-1}+\ldots+L_{x+n-1}\cdot u^{-(n-1)}}{L_x}$$

يضرب البسط والمقام بالمقدار u^{-x} نحصل على:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{L_x \cdot u^{-x} + L_{x+1} \cdot u^{-(x+1)} + \ldots + L_{x+n-1} \cdot u^{-(x+n-1)}}{L_x \cdot u^{-x}}$$

وباعتبار أن: $L_x \cdot u^{-x} = D_x$

فنجد:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x}$$

إلا أن البسط يمكن كتابته بالشكل:

$$= [D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega] - [D_{x+n} + D_{x+n+1} + \ldots + D_\omega]$$

$$= N_x - N_{x+n}$$

وبالتالي فإن:

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}} \qquad [17]$$

ويمكن كتابة العلاقة الأخيرة بصيغة أخرى:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

$$\boxed{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_x - {}_{n|}\ddot{a}_x} \qquad [18]$$

ومن أجل c وحدة نقدية كقيمة للدفعة الواحدة،يكون:

$$c \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = c \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad [19]$$

مثال:



عند شراء شخص عمره 41 سنة لوثيقة تأمين تتيح له الحصول على دفعات قيمة كل منها 30000 ل.س لحين بلوغه تمام الستين من العمر.رغب في المفاضلة بين الحصول على الدفعات في بداية كل سنة وبين الحصول عليها في نهاية كل سنة حيث سيختار الأسلوب ذو التكلفة الأقل.

حدد الأسلوب الأفضل مستنداً إلى قيم القسط الوحيد الصافي.

الحل:

لدينا: $n = 60 - 41 = 19$ ، $c = 30000$ ، $x = 41$

نقوم أولاً بحساب القسط الوحيد الصافي لـ 19 دفعة في حالة أن الدفعة تتم في نهاية كل سنة،أي المطلوب إيجاد $C \cdot a_{x\,\overline{n}|}$:

$$30000 \quad a_{41\,\overline{19}|} = 30000 \frac{N_{42} - N_{61}}{D_{41}}$$

$$= 30000 \frac{289370.06 - 73913.474}{17359.172}$$

$$= 30000(12.41168565)$$

$$= 372350.6$$ ل.س

أما القسط الوحيد الصافي في حالة أن الدفعة تتم في بداية كل سنة وبدءاً من لحظة توقيع العقد فهو $c\partial_{x\,\overline{n}|}$:

$$c \cdot \partial_{x\,\overline{n}|} = c \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$30000 \quad \partial_{41\,\overline{19}|} = 30000 \frac{N_{41} - N_{60}}{D_{41}}$$

$$= 30000 \frac{306729.23 - 80851.703}{17359.172}$$

$$= 30000(13.0119989)$$

$$= 390360$$ ل.س

إذاً،إن تكلفة وثيقة تتيح الحصول على دفعات عادية هي أقل من تلك التي تتيح الحصول على دفعات فورية وبالتالي يمكن للشخص x شراء الوثيقة الأولى (وثيقة الدفعات العادية) إذ فيها وفر مقدار 18009.4 ل.س، ولكنها تضمن تأخيراً في الدفع.

7 – القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين دفعات عادية مؤجلة مؤقتة:

لنرمز $_{m|n}a_x$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين يتم بموجبها قيام الشركة بتقديم n دفعة دورية سنوية للمستأمن x قيمة كل منها وحدة نقدية واحدة،حيث تبدأ الدفعة الأولى في نهاية السنة التالية لمرور m عام من بدء الزمن.

إذاً نحن أمام دفعات مؤجلة بمقدار m سنة ومؤقتة بمقدار n سنة.

بالأسلوب بنفسه الذي اتبعناه سابقاً يمكن أن نكتب حسب قاعدة التكلفة السابقة مايلي:

$$L_x \cdot {}_{m|n}a_x = L_{x+m+1} \cdot u^{-(m+1)} + L_{x+m+2} \cdot u^{-(m+2)} + ... + L_{x+m+n} \cdot u^{-(m+n)}$$

وهكذا نجد أن:

$${}_{m|n}a_x = \frac{L_{x+m+1}.u^{-(m+1)} + L_{x+m+2}.u^{-(m+2)} + ... + L_{x+m+n}.u^{-(m+n)}}{L_x}$$

نضرب البسط والمقام بالمقدار u^{-x} فنجد أن:

$${}_{m|n}a_x = \frac{L_{x+m+1}.u^{-(x+m+1)} + L_{x+m+2}.u^{-(x+m+2)} + ... + L_{x+m+n}.u^{-(x+m+n)}}{L_x.u^{-x}}$$

وباعتبار أن $L_x.u^{-x}=D_x$ فيكون:

$$_{m|n}a_x=\frac{D_{x+m+1}+D_{x+m+2}+\ldots+D_{x+m+n}}{D_x}$$

حيث يمكن كتابة البسط بالشكل:

$$=\left[D_{x+m+1}+D_{x+m+2}+\ldots+D_{\omega}\right]-\left[D_{x+m+n+1}+D_{x+m+n+2}+\ldots+D_{\omega}\right]$$

$$=N_{x+m+1}-N_{x+m+n+1}$$

وبالتالي يكون لدينا:

$$_{m|n}a_x=\frac{N_{x+m+1}-N_{x+m+n+1}}{D_x} \qquad [20]$$

يمكن كتابة العلاقة [20] بصيغة أخرى وهي:

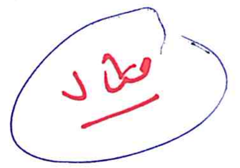
$$_{m|n}a_x=\frac{N_{x+m+1}}{D_x}-\frac{N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

$$_{m|n}a_x={}_{m|}a_x-{}_{m+n|}a_x \qquad [21]$$

وأيضاً يمكن لنا عند الوقوف بعد m سنة اعتباراً من بدء الزمن، حيث يكون عمر الشخص عندها $x+m$ والقسط الوحيد الصافي للدفعات بتلك اللحظة يكون $a_{x+m\,\overline{n}|}$ بشرط أن يكون قد بقي على قيد الحياة، وبالتالي فإن القيمة الحالية في بدء الزمن للمقدار $a_{x+m\,\overline{n}|}$ هو القسط الوحيد الصافي المطلوب لدفعات عادية مؤجلة مؤقتة:

$$_{m|n}a_x={}_mE_x\cdot a_{x+m\,\overline{n}|} \qquad [22]$$

مثال:



احسب القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها الشركة بتقديم دفعات عادية إلى المستأمن x ، قيمة كل منها 25000 ل.س، حيث تستحق الدفعة الأولى في نهاية الـ 12 سنة اعتباراً من لحظة توقيع العقد ، وتستمر الدفعات حتى بلوغ الشخص الستين من العمر

الحل:

لدينا :

$$n = 60 - (x + m + 1) \;;\; m = 12 - 1 = 11 \;;\; x = 35 \;;\; c = 25000$$

(كون الدفعات عادية)

والمطلوب هو قسط وحيد صاف لوثيقة دفعات عادية مؤجلة بمقدار 11سنة ومؤقتة بمقدار 13سنة، وبالتالي:

$$c._{m|n}a_x = c.\frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

$$25000 \quad {}_{11|13}a_{35} = 25000 \; \frac{N_{47} - N_{60}}{D_{35}}$$

$$= 25000 \; \frac{213046.93 - 80851.703}{22363.275}$$

$$= 25000(5.911264204)$$

$$= 147780.6 \text{ ل.س}$$

مثال:

تعاقد شخص عمره 30سنة مع شركة تأمين على أن يبدأ الحصول على دفعات دورية سنوية قيمة كل منها 31000 ل.س في نهاية السنة التالية لمرور خمس سنوات على لحظة توقيع العقد ولمدة ثلاثين سنة. أوجد القسط الوحيد الصافي الواجب أداؤه من قبل الشخص

الحل:

لدينا :

$$x = 30 \;;\; c = 31000 \;;\; n = 30 \;;\; m = 5$$

والدفعات عادية، إذاً القسط الوحيد الصافي هو

$$c.\ {}_{m|n}a_x$$

$$c.{}_{m|n}a_x = c.\frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}$$

$$31000\ \ {}_{5|30}a_{30} = 31000\ \frac{N_{36} - N_{66}}{D_{30}}$$

$$= 31000\ \frac{405493 - 44949.996}{27493.292}$$

$$= 31000(1311385352)$$

$$= 406529.459$$ ل.س

8 – القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين دفعات فورية مؤجلة مؤقتة:

لنرمز بـــ ${}_{m|n}\partial_x$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شـــركة التأمين بتقديم n دفعة دورية سنوية للمستأمن x قيمة كل منـــها وحـــدة نقديـــة واحدة، حيث تبدأ الدفعة الأولى في بداية السنة التالية لإتمام الشخص المستأمن العمـــر $x+m$.

لإيجاد ${}_{m|n}\partial_x$ نتّـــــــــــبع الأسلوب نفسه الذي اتبعناه لدى إيجاد ${}_{m|n}a_x$ مع فارق أننا نبدأ بعدد الأشخاص الباقين على قيد الحياة على العمر $x+m$ بدلاً مـــن $x+m+1$ نظراً لأن الدفعة تتم في نهاية السنة $x+m$ وذلك كالتالي:

$$L_x \cdot {}_{m|n}\partial_x = L_{x+m}\cdot u^{-m} + L_{x+m+1}\cdot u^{-(m+1)} + \ldots + L_{x+m+n-1}\cdot u^{-(m+n-1)}$$

$$_{m|n}\partial_x = \frac{L_{x+m}.u^{-m} + L_{x+m+1}.u^{-(m+1)} + \ldots + L_{x+m+n-1}.u^{-(m+n-1)}}{L_x}$$

بتكرار ما اتبعناه في الفقرات السابقة نحصل على:

$$_{m|n}\partial_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} \quad [23]$$

ويمكن التعبير عن العلاقة أعلاه بصيغة أخرى:

$$_{m|n}\partial_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} - \frac{N_{x+m+n}}{D_x}$$

$$_{m|n}\partial_x = {}_{m|}\partial_x - {}_{m+n|n}\partial_x \quad [24]$$

مثال:

احسب القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين دفعات دورية سنوية فورية قيمة كل منها60000 ل.س، تبدأ الدفعة الأولى عند بلوغ الشخص (الموجود الآن على العمر 33سنة) العمر 45 سنة ، وتستمر الدفعات حتى يتم الخامسة والستين، حيث تتوقف.

(ملاحظة: تستمر الدفعات قبل الخامس والستين طالما هو على قيد الحياة.)

الحل:

لدينا:

$$m = 45 - 33 = 12 \; ; \; x = 33 \; ; \; c = 60000$$

$$n = 65 - (x + m) = 20$$

وبالتالي آخر دفعة تستحق عند إتمامه الرابعة والستين، المطلوب هو $C . {}_{m|n}\partial_x$ حيث:

$$c \cdot {}_{m|n}\partial_x = C \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

$$60000 \cdot {}_{12|20}\partial_{33} = 60000 \cdot \frac{N_{45} - N_{65}}{D_{33}}$$

$$= 60000 \cdot \frac{241579.89 - 50014.281}{24298.329}$$

$$= 60000\ (7.883900535\ \ )$$

$$= 473034$$ ل.س

مثال:

تعاعد شخص عمره 42 سنة مع إحدى شركات التـأمين علـى أن تقـوم الشركة بإعطائه التالي:

1-مبلغاً قدره 500000 ل.س وذلك عند إتمامه الخامسة والخمسين من العمـر فيما إذا بقي حياً حتى ذلك العمر.

2-دفعات دورية سنوية قيمة كل منها 5000 ل.س تبدأ الأولى منها بعد مرور ثلاث سنوات وتستمر طيلة بقائه حياً ولحين وصوله الخامسة والخمسين من العمر.

الحل:

لدينا :

$c1 = 5000 \qquad c = 500000 \qquad x = 42 \qquad m = 3$

$n = 55 - 45 = 10 \qquad n1 = 55 - 42 = 13$

1-القسط الوحيد الصافي لقاء ضمان حصوله على مبلغ 500000 ل.س هـــو قسط وحيد صاف لوثيقة وقفية بحتة:

$$c \cdot n1E_x = c \cdot \frac{D_{x+n1}}{D_x}$$

$$500000 \ {}_{13}E_{42} = 500000 \frac{D_{55}}{D_{42}}$$

$$= 500000 \ \frac{9100 \ .2134}{16627 \ .378}$$

$$= 500000 \quad (0.547302972 \quad)$$

$= 273651 \quad .486$ ل.س

2- القسط الوحيد الصافي لقاء ضمان حصوله على الـــدفعات، هـــو لـــدفعات فورية(كون الدفعة الأولى تبدأ في نهاية ثلاث السنوات التالية للعمر 42 سنة) مؤجلـــة بـــ $m = 3$ سنة مؤقتة بـــ $n = 10$ سنوات.

$$c1 \cdot {}_{m|n}\partial_x = c1 \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}$$

$$5000 \ {}_{3|10}\partial_{42} = 5000 \frac{N_{45} - N_{55}}{D_{42}}$$

$$= 5000 \frac{241579.89 - 121902.36}{16627.378}$$

$$= 5000(7.197618891)$$

$= 359880945$

ل.س

ويكون مجموع التزامات الشخص اتجاه الشركة هو P ، حيث:

$$P = c.n1E_x + c1._{m|n}\partial_x$$
$$= 273651.4861 + 35988.0945$$
$$= 309639.58$$ ل.س

6.2 – الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق تأمين دفعات دورية جزئية لمدى الحياة:

المقصود بالدفعات الدورية الجزئية،تلك الدفعات الدورية غير السنوية التي تستحق خلال كل سنة. وهذه الدفعات قد تكون شهرية أو كل شهرين أو كل ثلاثة أشهر أوكل ستة أشهر وهكذا....

بالأسلوب بنفسه الذي اتبعناه في فصل سابق لدى معالجة القيمة الحالية للدفعات الجزئية،نفترض هنا أن السنة الواحدة مجزأة إلى k جزءاً متساوياً وأن كل جزء يمثل وحدة زمن جديدة،حيث تأخذ القيم التالية:

$k = 2 \Leftarrow$ وجود جزأين متساويين، وبالتالي تعتبر نصف السنة هي وحدة الزمن الجديدة.

$k = 3 \Leftarrow$ وجود 3 أجزاء متساوية، وبالتالي تعتبر ثلث السنة هي وحدة الزمن الجديدة.

$k = 4 \Leftarrow$ وجود 4 أجزاء متساوية، وبالتالي يعتبر الفصل هو وحدة الزمن الجديدة.

$k = 6 \Leftarrow$وجود 6 أجزاء متساوية، وبالتالي تعتبر فترة الشهرين هي وحدة الزمن الجديدة.

$k = 12 \Leftarrow$ وجود 12 جزءاً متساوياً، وبالتالي يعتبر الشهر هو وحدة الزمن الجديدة.

6.2.1- الدفعات الدورية الجزئية العادية لمدى الحياة:

لنرمز بـــ $a_x^{(k)}$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شركة التـــأمين بتأدية دفعات دورية قيمة كل منه $\frac{1}{k}$ من وحدة النقد، لشخص عمره x سنة، تبـــدأ الدفعة الأولى في نهاية $\frac{1}{k}$ من السنة الأولى اعتباراً من بدء الزمن (من لحظـــة توقيـــع العقد) والدفعة الثانية في نهاية $\frac{2}{k}$ من السنة الأولى اعتباراً من بدء الـــزمن وهكـــذا ...... تستمر الدفعات طيلة بقاء الشخص x على قيد الحياة.

لإيجاد قيمة $a_x^{(k)}$ نبدأ بتطبيق قاعدة التكلفة السابقة فنجد أن:

$$L_x \cdot a_x^{(k)} = \frac{1}{k} L_{x+\frac{1}{k}} \cdot u^{-\frac{1}{k}} + \frac{1}{k} L_{k+\frac{2}{k}} \cdot u^{-\frac{2}{k}} + \ldots\ldots \frac{1}{k} L_{x+1} \cdot u^{-1} + \frac{1}{k} L_{x+1+\frac{1}{k}} \cdot u^{-(1+\frac{1}{k})} + \ldots + \frac{1}{k} L_{\omega} \cdot u^{-(\omega-x)}$$

$$L_x \cdot a_x^{(K)} = \frac{1}{K}\left[L_{x+\frac{1}{K}} \cdot u^{-\frac{1}{K}} + L_{x+\frac{2}{K}} \cdot u^{-\frac{2}{K}} + \ldots + L_{x+1} \cdot u^{-1} + L_{x+1+\frac{1}{K}} \cdot u^{-\left(1+\frac{1}{K}\right)} + \ldots + L_{\omega} \cdot u^{-(\omega-x)} \right]$$

$$a_x^{(K)} = \frac{1}{K}\left[\frac{L_{x+\frac{1}{K}}}{L_x} u^{-\frac{1}{K}} + \frac{L_{x+\frac{2}{K}}}{L_x} u^{-\frac{2}{K}} + \ldots + \frac{L_{x+1}}{L_x} u^{-1} + \frac{L_{x+1+\frac{1}{K}}}{L_x} u^{-\left(1+\frac{1}{K}\right)} + \ldots \right]$$

$$\frac{1}{k}\left[{}_{\frac{1}{k}}p_x \cdot u^{-\frac{1}{k}} + {}_{\frac{2}{k}}p_x \cdot u^{-\frac{2}{K}} + \ldots + {}_{1}p_x \cdot u^{-1} + {}_{\left(1+\frac{1}{K}\right)} p_x \cdot u^{-\left(1+\frac{1}{K}\right)} + \ldots \right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[{}_{\frac{1}{k}}E_x + {}_{\frac{2}{k}}E_x + \ldots + {}_{1}E_x + {}_{\left(1+\frac{1}{K}\right)}E_x + \ldots + {}_{2}E_x + \ldots \right] \qquad [25]$$

نجري التعويضات التالية بالنسبة للسنة الأولى:

$$ {}_{\frac{1}{k}}E_x = \left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot {}_0E_x + \frac{1}{k}\cdot {}_1E_x $$

$$ {}_{\frac{2}{k}}E_x = \left(1-\frac{2}{k}\right)\cdot {}_0E_x + \frac{2}{k}\cdot {}_1E_x $$

....

$$ {}_{\frac{k}{k}}E_x = \left(1-\frac{k}{k}\right)\cdot {}_0E_x + \frac{k}{k}\cdot {}_1E_x $$

وبالتالي فإن:

$$ {}_{\frac{1}{k}}E_x + {}_{\frac{2}{k}}E_x + \ldots + {}_{\frac{k}{k}}E_x = \frac{k-1}{2} + \frac{k+1}{2}\cdot {}_1E_x $$

نكرر التعويض بالنسبة للسنوات التالية ونجري بقية الإصلاحات فنصل إلى:

$$ a_x^{(K)} = \frac{1}{k}\left[\frac{k-1}{2} + k\cdot {}_1E_x + k\cdot {}_2E_x + k\cdot {}_3E_x + \ldots + {}_{k(\omega-x)}E_x\right] $$

$$ = \frac{k-1}{2k} + \left[{}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots + {}_{(\omega-x)}E_x\right] $$

$$ = \frac{K-1}{2K} + \left[\frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots + \frac{D_\omega}{D_x}\right] $$

$$ a_x^{(k)} = \frac{k-1}{2k} + \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad [26] $$

وبالتالي:

$$ \boxed{a_x^{(K)} = \frac{k-1}{2k} + a_x} \qquad [27] $$

وهي القسط الوحيد الصافي من أجل دفعات دورية قيمة كل منها $\frac{1}{K}$ من وحدة النقد أما من أجل دفعات قيمة كل منها C وحدة نقدية في كل دورة فتكون قيمة القسط الوحيد الصافي هي:

$$= C \cdot K \cdot a_x^{(k)} \qquad [28]$$

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شركة التأمين بتقديم دفعات دورية نصف سنوية قيمة كل منها 20000 ل.س لشخص عمره عند توقيع العقد 45 سنة، بحيث تبدأ الدفعة الأولى في نهاية النصف الأول التالي للحظة توقيع العقد وتستمر الدفعات طيلة بقاء الشخص على قيد الحياة

الحل:

بما أن الدفعات نصف سنوية، إذاً $K = 2$ وكذلك $x = 45$ وبالتالي المطلوب هو:

$$C \cdot k \cdot a_x^{(K)}$$

$$C \cdot k \cdot a_x^{(K)} = C.K.\left[\frac{k-1}{2k} + a_x\right]$$

$$= C.K\left[\frac{K-1}{2K} + \frac{N_{x+1}}{D_x}\right]$$

$$20000(2).a_{45}^{(2)} = 20000(2)\left[\frac{1}{4} + \frac{N_{46}}{D_{45}}\right]$$

$$= 40000\left[\frac{1}{4} + \frac{226996.14}{14583.745}\right]$$

$$= 40000[15.81501022]$$
$$= 632600.4$$

مثال:

أعد المطلوب في المثال السابق بافتراض أن الدفعات الدورية تتم كل ثلاثة أشهر.

الحل:

الدفعات كل ثلاثة أشهر وبالتالي هناك في السنة أربع دفعات، أي $k=4$ وبالتالي:

القسط الوحيد الصافي هو:

$$20000(4).a_{45}^{(4)} = 20000(4)\left[\frac{3}{8}+\frac{N_{46}}{D_{45}}\right]$$

$$=80000\left[\frac{3}{8}+\frac{226996.14}{14583.745}\right]$$

$$=80000[15.94001022]$$

$$=1275200.0818 \quad \text{ل.س}$$

6.2.2-الدفعات الدورية الجزئية الفورية مدى الحياة:

لنرمز بـ $\partial_x^{(k)}$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شركة التأمين بتقديم دفعات دورية قيمة كل منها $\frac{1}{k}$ من الوحدة النقدية إلى المستأمن الموجود على العمر x

بحيث تبدأ الدفعة الأولى لحظة توقيع العقد والدفعة الثانية في نهاية $\frac{1}{k}$ من السنة اعتباراً من لحظة توقيع العقد، وهكذا... تستمر الدفعات طيلة بقاء المستأمن على قيد الحياة ، وبالتالي نلاحظ أن :

$$\boxed{\partial_x^{(K)}=\frac{1}{K}+a_x^{(K)}} \qquad [29]$$

وباستبدال $a_x^{(K)}$ بقيمتها نجد:

$$\boxed{\partial_x^{(k)}=\frac{1}{k}+\frac{k-1}{2k}+a_x}$$

$$a_x^{(K)} = \frac{K+1}{2K} + a_x \quad [30]$$

ومن أجل C وحدة نقدية كقيمة للدفعة الواحدة، يكون:

$$C \cdot k \cdot \partial_x^{(k)} = C.K.\left[\frac{k+1}{2k} + a_x\right] \quad [31]$$

مثال:

ما هو القسط الوحيد الصافي اللازم لتأمين دفعات دورية شهرية قيمة كل منـــها 10000 ل.س لشخص عمره 36 سنة، حيث تبدأ الدفعة الأولى لحظة توقيع العقـــد وتستمر طيلة بقاء الشخص على قيد الحياة

الحل:

لدينا:

$$x=36 \;\; ; c=10000 \quad ; \; k=12$$

والدفعات دورية فورية، إذاً:

$$C.K.\partial_x^{(K)} = C.K\left[\frac{K+1}{2K} + a_x\right]$$

$$= C.K\left[\frac{K+1}{2K} + \frac{N_{x+1}}{D_x}\right]$$

$$10000\,(12)\,\partial_{36}^{(12)} = 10000(12)\left[\frac{13}{24} + \frac{N_{37}}{D_{36}}\right]$$

$$= 120000\left[\frac{13}{24} + \frac{384043.35}{21449.65}\right]$$

$$=120000[18.44611103]$$

$$= 2213529.32$$ ل.س

6.2.3- الدفعات الدورية الجزئية العادية المؤخرة مدى الحياة:

لنرمز بـــ $_{m|}a_x^{(k)}$ إلى القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتـــزم بموجبـــها شركة التأمين بتقديم دفعات دورية للمستأمن x قيمة كـــل منـــها $\frac{1}{k}$ مـــن وحـــدة النقد،بحيث تبدأ الدفعة الأولى في نهاية الـــ $\frac{1}{k}$ من السنة التالية لـــ m سنة اعتباراً من بدء الزمن(لحظة توقيع العقد) والدفعة الثانية في نهايـــة الـــــ $\frac{2}{k}$ مـــن الـــسنة. وهكذا... تستمر الدفعات طيلة بقاء المستأمن على قيد الحياة.

بعد مرور mعام وفي اللحظة $x+m$ من عمر المستأمن تكون القيمـــة الحالية في تلك اللحظة للدفعات الجزئية التالية لها هي $a_{x+m}^{(k)}$ أما القيمة الحالية في بدء الزمن (العمر x) للقيمة $a_{x+m}^{(k)}$ تكون:

$$_{m|}a_x^{(K)} = {}_mE_x . a_{x+m}^{(K)}$$

$$= {}_mE_x \left[\frac{k-1}{2k} + a_{x+m} \right]$$

$$\boxed{_{m|}a_x^{(K)} = \frac{k-1}{2k} {}_mE_x + {}_mE_x . a_{x+m}} \quad [32]$$

وبصيغة أخرى:

$$\boxed{_{m|}a_x^{(k)} = \frac{K-1}{2k} {}_mE_x + {}_{m|}a_x} \quad [33]$$

ومن أجل قيمة لكل دفعة تساوي C وحدة نقدية يكون القسط الوحيد الـــصافي مساوياً إلى:

$$C.k._{m|}a_x^{(K)} = C.k \left[\frac{k-1}{2k} {}_mE_x + {}_{m|}a_x \right] \quad [34]$$

مثال:

أوجد قيمة القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها الشركة بتقديم دفعات دورية شهرية لشخص عمره **47** سنة، قيمة كل دفعة **3000** ل.س بحيث تبدأ الدفعة الأولى نهاية الشهر الأول التالي لبلوغ الشخص سن الخمسين وتتوالى الدفعات طيلة بقاء الشخص على قيد الحياة.

الحل:

لدينا: $x=47$; c=3000 ; k=12 ; m=3

ويكون المطلوب هو القسط المتعلق بدفعات جزئية عادية:

$$C\cdot k\cdot_{m|}\ a_x^{(k)}$$

بتطبيق العلاقة **[32]** مع الأخذ بعين الاعتبار وجود **C** وحدة نقدية كقيمة للدفعة:

$$Ck._{m|}\,a_x^{(K)}=C.K.\left[\frac{k-1}{2k}\,{}_mE_x+{}_mE_x.a_{x+m}\right]$$

$$3000\,(12)\ {}_{3|}\ a_{47}^{(12)}=3000\,(12)\left[\frac{11}{24}\,{}_3E_{47}+{}_3E_{47}\,.\,a_{50}\right]$$

$$=36000\left[\frac{11}{24}.\frac{D_{50}}{D_{47}}+\frac{D_{50}}{D_{47}}.\frac{N_{51}}{D_{50}}\right]$$

$$=36000\left[\frac{11}{24}.\frac{11617.341}{13336.155}+\frac{11617.341}{13336.155}.\frac{163178.34}{11617.341}\right]$$

$$=36000\left[0.399261603+12.235786102\right]$$

$$=454861$$ ل.س

6.2.4- الدفعات الدورية الجزئية الفورية المؤخرة ولمدى الحياة:

لنرمز بـــ ${}_{m|}\partial_x^{(k)}$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شـــركة التأمين بتقديم دفعات دورية للمستأمن x قمة كل منها $\frac{1}{k}$ من وحدة النقد،بحيث تبدأ الدفعة الأولى في بداية السنة التالية لمرور m سنة من بدء الزمن (لحظة توقيع العقد) أما الدفعة الثانية فتتم نهاية الـــ $\frac{1}{k}$ من السنة التالية لـــ m سنة اعتباراً من بدء الزمن والدفعة الثالثة نهاية الـــ $\frac{2}{k}$ من تلك السنة، وهكذا... تستمر الدفعات طيلة بقاء المستأمن على قيد الحياة.

بعد مرور m سنة وفي اللحظة $x+m$ من عمر المستأمن تكون القيمـــة الحالية في تلك اللحظة للدفعات الجزئية التالية لها هي $\partial_{x+m}^{(k)}$ أما القيمة الحالية في بدء الزمن (عند العمر x) للقيمة $\partial_{x+m}^{(k)}$ فتكون:

$$ {}_{m|}\partial_x^{(K)} = {}_mE_x . a_{x+m}^{(K)} $$

$$ = {}_mE_x \left[\frac{k+1}{2k} + a_{x+m} \right] $$

$$ \boxed{ {}_{m|}\partial_x^{(K)} = \frac{k+1}{2k} \, {}_mE_x + {}_mE_x . a_{x+m} } \qquad [35] $$

وبصيغة أخرى:

$$ \boxed{ {}_{m|}\partial_x^{(k)} = \frac{K+1}{2k} \, {}_mE_x + {}_{m|}a_x } \qquad [36] $$

ومن أجل قيمة لكل دفعة تساوي **C** وحدة نقدية يكون القسط الوحيد الـــصافي مساوياً إلى:

$$ C.k.{}_{m|}\partial_x^{(K)} = C.k \left[\frac{k+1}{2k} \, {}_mE_x + {}_{m|}a_x \right] \qquad [37] $$

6.2.5- الدفعات الدورية الجزئية العادية المؤقتة (المحددة):

لنرمز بـــ $a_{x}^{(K)}\,\overline{\vphantom{a}}_{\mathrm{n}}$ إلى القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين يتم بموجبها التـــزام شركة التأمين بتقديم دفعات دورية إلى المستأمن الموجود على العمر x قيمة كل منها $\frac{1}{k}$ من وحدة النقد،بحيث تبدأ الدفعة الأولى في نهاية الـــ $\frac{1}{k}$ من السنة اعتباراً مـــن بدء الزمن (لحظة توقيع العقد)، والثانية في نهاية $\frac{2}{k}$ من السنة وهكـــذا ....تـــستمر الدفعات طيلة بقاء المستأمن على قيد الحياة ولمدة أقصاها n سنة – اعتباراً مـــن بـــدء الزمن.

للوصول إلى $a_{x}^{(K)}\,\overline{\vphantom{a}}_{\mathrm{n}}$ نكتب:

$$a_{x}^{(K)}\,\overline{\vphantom{a}}_{\mathrm{n}} = a_{x}^{(K)} - {}_{n|}a_{x}^{(K)}$$

$$= \left[\frac{k-1}{2k} + a_{x}\right] - \left[\frac{k-1}{2k} \cdot {}_{n}E_{x} + {}_{\mathrm{n}|}a_{x}\right]$$

$$= \frac{k-1}{2k} + a_{x} - \frac{k-1}{2k}\ {}_{n}E_{x} - {}_{n|}\ a_{x}$$

$$= \frac{K-1}{2K}\left[1 - {}_{n}\ E_{x}\right] + \left[a_{x} - {}_{n|}\ a_{x}\right]$$

$$\boxed{a_{x}^{(K)}\,\overline{\vphantom{a}}_{\mathrm{n}} = \frac{K-1}{2K}\left[1 - {}_{n}E_{x}\right] + a_{x}\,\overline{\vphantom{a}}_{\mathrm{n}}} \qquad [38]$$

ومن أجل C وحدة نقدية كقيمة للدفعة الواحدة يكون القسط مساوياً إلى:

$$C \cdot K \cdot a_{x}^{(k)}\,\overline{\vphantom{a}}_{\mathrm{n}} = C.K\left[\frac{k-1}{2k}\left(1 - {}_{n}E_{x}\right) + a_{x}\,\overline{\vphantom{a}}_{\mathrm{n}}\right] \qquad [39]$$

مثال:

احسب القسط الوحيد الصافي الواجب دفعه من شخص عمره 35 سنة ليصل إلى تأمين راتب تقاعدي شهري قدره 2500 ل.س بدءاً من نهاية الشهر التالي لتوقيع العقد وتستمر الدفعات حتى بلوغ الشخص العمر 60 سنة.

الحل:

لدينا: $x=35\ ;\ c=2500\ ;\ k=12\ ;\ n=60-35=25$

وبالتالي نحن أمام دفعات دورية جزئية مؤقتة بـــ 25 سنة، فالقسط الوحيـــد الصافي:

$C \cdot k \cdot a_{x\,\overline{n}|}^{(K)}$، حيث:

$$C \cdot K \cdot a_{x\,\overline{n}|}^{(K)} = C.K\left[\frac{K-1}{2K}\left(1-{}_{n}E_{x}\right)+a_{x\,\overline{n}|}\right]$$

$$2500(12)\,a_{35\,\overline{25}|}^{(12)} = 2500\,(12)\left[\frac{11}{24}\left(1-\frac{D_{60}}{D_{35}}\right)+\frac{N_{36}-N_{61}}{D_{35}}\right]$$

$$=30000\left[\frac{11}{24}\left(1-\frac{6938.2292}{22363.275}\right)+\frac{405493-73913.474}{22363.275}\right]$$

$$=30000\left[\frac{11}{24}(0.68974897)+14.8269664\right]$$

$$=30000[0.316134944+14.8269664]$$

$$=30000[15.14310134]$$

$= 454293.04$ ل.س

6.2.6- الدفعات الدورية الجزئية الفورية المؤقتة (المحددة):

لنرمز بـــ $\partial_{x\,\overline{n}|}^{(k)}$ إلى القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها الشركة بتقديم دفعات دورية إلى المستأمن الموجود على العمر x ، قيمة كل منـــها $\frac{1}{k}$ مـــن

وحدة النقد.بحيث تبدأ الدفعة الأولى في بدء الزمن (لحظة توقيع العقد) والثانية في نهاية الـــ $\frac{1}{k}$ من السنة اعتباراً من بدء الزمن، وتتوالى الدفعات طيلة بقاء الشخص x علـــى قيد الحياة ولمدة أقصاها n سنة اعتباراً من بدء الزمن.

لإيجاد $\partial_{x\,\overline{n}|}^{(k)}$ نتبع الأسلوب المتعلق بالدفعات الجزئية العادية نفسه ، فنحـــصل على:

$$\partial_{x\,\overline{n}|}^{(K)} = \frac{K+1}{2K}\left(1-{}_{n}E_{x}\right)+a_{x\,\overline{n}|} \qquad [40]$$

ويكون $C \cdot k \cdot a_{x\overline{n}|}^{(k)}$ هو القسط الوحيد الصافي في حالة أن قيمة كل دفعة تساوي إلى C وحدة نقدية.

مثال:

تعاقد شخص عمره 39 سنة مع إحدى شركات التأمين على أن تـــدفع لـــه رواتب ربع سنوية دورية قيمة كل منها 90000 ل.س وبدءاً من لحظة توقيع العقـــد وحتى بلوغه سن الخمسين من العمر إذا بقي حياً. وعندها تدفع له الشركة أيضاً مبلغ 200000 ل.س.

احسب القسط الوحيد الصافي المترتب على الشخص دفعه للشركة.

الحل:

القسط هنا ينقسم إلى جزأين:

-الجزء الأول P_1 وهو القسط الوحيد الصافي للدفعات:

$$p_1 = C \cdot k \cdot \partial_{x\,\overline{n}|}^{(k)} = C \cdot k\left[\frac{k+1}{2k}\left(1-{}_{n}E_{x}\right)+a_{x\,\overline{n}|}\right]$$

$$90000\,(4)\,\partial_{39}^{(4)}\,_{\overline{11}|} = 360000\left[\frac{5}{8}\left(1-\frac{D_{50}}{D_{39}}\right)+\frac{N_{40}-N_{51}}{D_{39}}\right]$$

$$= 360000\left[\frac{5}{8}\left(1-\frac{11617.341}{18905.091}\right)+\frac{324847.01-163178.34}{18905.091}\right]$$

$$= 360000\left[0.24093213 + 8.551594383\right]$$

$$= 36000\left[8.792526509\right]$$

$$= 316530.9543 \quad \text{ل.س}$$

-الجزء الثاني p_2 وهو القسط الوحيد الصافي للمبلغ المؤجل(رأس المال المؤجل) البالغ 200000 ل.س:

$$p_2 = C\cdot{}_nE_x = C\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

ل.س

$$= 200000\cdot{}_{11}E_{39} = 200000\frac{D_{50}}{D_{39}} = 200000\frac{11617.341}{18905.091} = 122901.72$$

إذاً القسط الوحيد الصافي الكلي P هو:

$$P = P_1 + P_2$$

$$= 316530.9543 + 122901.72 = 439432.67 \quad \text{ل.س}$$

6.2.7- الدفعات الدورية الجزئية العادية المؤجلة والمؤقتة:

لنرمز بـــ ${}_{m|n}a_x^{(k)}$ إلى القسط الوحيد الصافي اللازم للحصول على دفعـــات دورية قيمة كل منها $\frac{1}{k}$ من وحدة النقد، تدفع الأولى في نهاية الـــ $\frac{1}{k}$ من السنة

التالية لبلوغ الشخص x العمر $x+m$ والثانية في نهاية الـــ $\frac{2}{k}$ مـــن الـــسنة.

وهكذا.. تستمر الدفعات طيلة بقاء الشخص على قيد الحياة ولمدة أقصاها $m+n$ سنة اعتباراً من بدء الزمن.

لإيجاد ${}_{m|n}a_x^{(k)}$ نكتب:

$${}_{m|n}a_x^{(k)} = {}_{m|}a_x^{(k)} - {}_{m+n|}a_x^{(k)}$$

$$= [\frac{k-1}{2k}\ {}_{m}E_x + {}_{m|}\ a_x] - [\frac{k-1}{2k}\ {}_{m+n}E_x + {}_{m+n|}\ a_x]$$

$$\boxed{{}_{m|n}a_x^{(k)} = \frac{k-1}{2k}\left[{}_{m}E_x - {}_{m+n}E_x\right] + \left[{}_{m|}a_x - {}_{m+n|}a_x\right]} \qquad [41]$$

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافي لدفعات دورية عادية نصف سنوية مؤجلة بمقـــدار خمس سنوات بالنسبة لشخص عمره 40 سنة وتستمر طيلة بقاء الشخص على قيـــد الحياة ولحين بلوغه الستين من العمر،مع العلم أن قيمـــة الدفعـــة الواحـــدة تـــساوي 20000 ل.س.

الحل:

لدينا :

$$k=2\ ;\ x=40\ ;\ c=20000\ ;\ m=5\ ;\ n=60-(40+5)=15$$

وبالتالي فإن:

$$C\cdot k\cdot {}_{m|n}a_x^{(K)} = C\cdot k\cdot\left[\frac{k-1}{2k}\left[{}_{m}E_x - {}_{m+n}E_x\right] + \left[{}_{m|}a_x - {}_{m+n|}a_x\right]\right]$$

$$= 20000\,(2)\ {}_{5|15}a_{40}^{(2)}$$

$$= 40000\left[\frac{1}{4}\left[\frac{D_{x+m}}{D_x}-\frac{D_{x+m+n}}{D_x}\right]+\left[\frac{N_{x+m+1}}{D_x}-\frac{N_{x+m+n+1}}{D_x}\right]\right]$$

$$= 40000\left[\frac{1}{4}\left[\frac{D_{45}-D_{60}}{D_{40}}\right]+\left[\frac{N_{46}-N_{61}}{D_{40}}\right]\right]$$

$$= 40000\left[\frac{1}{4}\left[\frac{14583.745 - 6938.2292}{18117.781}\right]+\left[\frac{226996.14 - 73913.474}{18117.781}\right]\right]$$

$$= 40000\left[\frac{1}{4}(0.42198964)+(8.44930546)\right]$$

$$= 40000\,(2.217823776)$$

ل.س

$$= 88712.951$$

6.2.8- الدفعات الدورية الجزئية الفورية المؤجلة المؤقتة (المحددة):

لنرمز بـــ ${}_{m|n}\partial_x^{(k)}$ إلى القسط الوحيد الصافي اللازم للحصول على دفعـــات دورية قيمة كل منها $\frac{1}{k}$ من وحدة النقد ، تدفع الأولى لحظة بلوغ الشخص x العمر $x+m$ ، والثانية في نهاية الـــ $\frac{1}{k}$ من السنة التالية للعمـــر $x+m$ وهكـــذا .... تستمر الدفعات طيلة بقاء الشخص على قيد الحياة ولمدة أقصاها $m+n$ سنة اعتبـــاراً من بدء الزمن.

بإتباع نفس الأسلوب المستخدم بخصوص الدفعات الجزئية العادية نجد أن:

$${}_{m|n}\partial_x^{(k)} = {}_{m|}\ \partial_x^{(k)} - {}_{m+n|}\ \partial_x^{(k)}$$

$$= \left[\frac{k+1}{2k} {}_{m}E_x + {}_{m|}a_x \right] - \left[\frac{k+1}{2k} \cdot {}_{m+n}E_x + {}_{m+n|}a_x \right]$$

$$\boxed{{}_{m|n}\partial_x^{(K)} = \frac{k+1}{2k}\left[{}_{m}E_x - {}_{m+n}E_x \right] + \left[{}_{m|}a_x - {}_{m+n|}a_x \right]} \qquad [42]$$

ومن أجل c وحدة نقدية كقيمة لكل دفعة يكون القسط الوحيد الصافي مساوياً

إلى: $C \cdot k \cdot {}_{m|n}\partial_x^{(k)}$

مثال:

أعد المطلوب في المثال السابق على اعتبار أن الدفعات فورية.

الحل:

$$C \cdot k\, {}_{m|n}\partial_x^{(k)} = C \cdot K\left[\frac{k+1}{2k}\left[{}_{m}E_x - {}_{m+n}E_x \right] + \left[{}_{m|}a_x - {}_{m+n|}a_x \right] \right]$$

$$= C \cdot K\left[\frac{k+1}{2k}\left[\frac{D_{x+m}}{D_x} - \frac{D_{x+m+n}}{D_x} \right] + \left[\frac{N_{x+m+1}}{D_x} - \frac{N_{x+m+n+1}}{D_x} \right] \right]$$

وبالتعويض:

$$20000(2)\; {}_{5|15}\partial_{40}^{(2)} = 40000\left[\frac{3}{4}\left[\frac{D_{45} - D_{60}}{D_{40}} \right] + \left[\frac{N_{46} - N_{61}}{D_{40}} \right] \right]$$

$$= 40000\left[\frac{3}{4}\left[\frac{14583.745 - 6938.2292}{18117.781} \right] + \left[\frac{226996.14 - 73913.474}{18117.781} \right] \right]$$

$$= 40000\left[\frac{3}{4}(0.42198964) + (8.449305464) \right]$$

$$= 40000(8.765797694)$$

$= 350631.91$

ل.س

6.3- الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق تأمين دفعات غير منتظمة (متزايدة أو متضاعفة):

وهي تتجسد بشكل رئيسي بالتالي:

6.3.1- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين دفعات عادية غير منتظمة:

لنرمز بـــ $(Ia)_x$ إلى القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شركة التأمين بتقديم دفعات إلى المستأمن ذي العمر x بحيث تكون الدفعة الأولى وحدة نقدية واحدة وتستحق نهاية السنة الأولى اعتباراً من بدء الزمن(لحظة توقيع العقد) والثانيـــة وحدتين نقديتين وتستحق نهاية السنة الثانية وهكذا... تستمر الدفعات طيلـــة بقـــاء الشخص x على قيد الحياة وبقيم وفق متوالية حسابية.

لإيجاد $(Ia)_x$ بتطبيق قاعدة التكلفة:

$$L_x.(Ia)_x = 1.L_{x+1}.u^{-1} + 2.L_{x+2}.u^{-2} + ... + (\omega - x - 1)L_{\omega-1}.u^{-(\omega-x-1)} + (\omega - x)L_\omega.u^{-(\omega-x)}$$

$$(Ia)_x = 1\frac{L_{x+1}}{L_x}u^{-1} + 2\frac{L_{x+2}}{L_x}u^{-2} + ... + (\omega - x - 1)\frac{L_{\omega-1}}{L_x}u^{-(\omega-x-1)} + (\omega - x)\frac{L_\omega}{L_x}u^{-(\omega-x)}$$

نضرب كل بسط ومقام بـــ $u^{-x} \Leftarrow$

$$= \frac{D_{x+1} + 2\cdot D_{x+2} + 3\cdot D_{x+3} + ... + (\omega - x - 1)D_{\omega-1} + (\omega - x)D_\omega}{D_x}$$

نلاحظ أن البسط يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3}..... + D_{\omega-1} + D_\omega = N_{x+1}$$

$$D_{x+2} + D_{x+3} + ... + D_{\omega-1} + D_\omega = N_{x+2}$$

....

$$D_{\omega-1} + D_\omega = N_{\omega-1}$$

$$D_{\omega} = N_{\omega}$$

وبالتعويض نجد:

$$(Ia)_x = \frac{N_{x+1} + N_{x+2} + ... + N_{\omega}}{D_x}$$

و كما سبق أن اصطلحنا في جداول الرموز الحسابية، فإن البسط ما هو إلا: S_{x+1}

وبالتالي نصل إلى أن :

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x} \qquad [43]$$

مثال:

عقد أحد الأشخاص عمره 55 سنة اتفاقاً مع شركة تأمين، بحيث تضمن له دفع 10000 ل.س نهاية السنة التالية للحظة توقيع العقد، وَ 20000 ل.س في نهاية السنة الثانية التالية لتلك اللحظة ، وهكذا تستمر الدفعات بزيادة قدرها 10000 ل.س سنوياً على كل دفعة وطيلة بقاء الشخص على قيد الحياة .

احسب القسط الوحيد الصافي الذي يترتّب على الشخص دفعه عند التعاقد.

الحل:

لدينا $C_2 = 20000 \qquad C_1 = 10000; \qquad x = 45; \quad C_{\omega-x} = ...;$

وبالتالي نقوم بإيجاد $(Ia)_{55}$ لمتوالية حسابية أساسها وحدة نقدية واحدة ثم نضرب الناتجة بالأساس 10000 وحدة نقدية فيكون هو المطلوب، إذاً:

$$(Ia)_x = \frac{S_{x+1}}{D_x}$$

$$(Ia)_{55} = \frac{S_{56}}{D_{55}} = \frac{1123689.8}{9100.2134}$$

$= 123.4794999$ ل.س

وبالتالي القسط الوحيد الصافي هو:

$$10000(123.4794999) = 1234794.999$$ ل.س

6.3.2-القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين دفعات فورية غير منتظمة:

لنرمز بـ $(I\partial)_x$ القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شركة التأمين بتقديم دفعات إلى المستأمن ذي العمر x بحيث تكون الدفعة الأولى وحدة نقدية واحدة وتستحق في بدء الزمن والثانية في نهاية السنة الأولى اعتباراً من بدء الزمن وقيمتها وحدتان نقديتان وهكذا.. تستمر الدفعات طيلة بقاء الشخص x على قيد الحياة وبقيم متوالية حسابية.

بإتباع نفس الأسلوب الذي عرضناه بما يتعلق بالقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين دفعات فورية غير منتظمة يمكن أن نصل إلى:

$$\boxed{(I\partial)_x = \frac{S_x}{D_x}} \qquad [44]$$

مثال:

- أعد المطلوب في المثال السابق على اعتبار أن الدفعات فورية.

الحل:

$$(I\partial)_x = \frac{S_x}{D_x}$$

$$(I\,\partial)_{55} = \frac{S_{55}}{D_{55}} = \frac{1245592.1}{9100.2134} = 136.875043$$ ل.س

وبالتالي فإن القسط الوحيد الصافي هو:

$$10000(136.875043) = 1368750.43$$ ل.س

6.4- تمارين غير محلولة

1- احسب القسط الوحيد الصافي (القيمة الحالية بتاريخ العقد) لمبلغ قدره 400000 ل.س يستحق السداد بعد عشر سنوات لشخص عمره بتاريخ العقد 40 عاماً ، بشرط بقاء الشخص على قيد الحياة طوال فترة تنفيذ العقد .

2- اشترى أب لابنه عند ولادته وثيقة تأمين تشترط أن تسدد شركة التأمين لابنه عند نجاحه في البكالوريا مبلغاً قدره مليون ليرة سورية و ذلك لمساعدته على تكملة دراسته الجامعية

إذا علمت أن الانتهاء من البكالوريا يكون عادة في عمر 18 سنة ، أوجد القسط الصافي الوحيد الذي يجب أن يسدده الأب لهذا التأمين .

3- عرضت شركة التأمين على شخص (25 سنة) أن تدفع له مبلغاً من المال و ذلك عند بلوغه الـ الخامسة و الخمسين من العمر مقابل أن يسدد لها قسطاً وحيداً صافياً قدره 30000 ل.س أو أن تدفع له مبلغاً عند بلوغه الستين من العمر مقابل دفعه قسطاً وحيداً صافياً قدره 20000 ل.س ، أي المبلغين أكبر مبلغ العرض الأول أم الثاني الذي يجب أن تدفعه شركة التأمين لهذا الشخص في حال تحقق أحد العرضين ؟

4- عند نجاح ولده أيمن (18 سنة) في البكالوريا قرر الأب أن يشتري له وثيقة تأمين تشترط تسديد دفعات سنوية لأيمن ما دام على قيد الحياة قيمة كل دفعة 100000 ل.س بحيث تستحق الأولى في نهاية العام الأول من شراء الأب لهذه الوثيقة ، احسب قيمة الوثيقة الصافي (القسط الوحيد الصافي) .

5- أعد التمرين السابق و بفرض أن الدفعة الأولى تستحق عند توقيع الوثيقة .

6- احسب القيمة الحالية (القسط الصافي الوحيد) لعقد تأمين ينص على دفعات سنوية عادية قيمة كل منها 150000 ل.س تدفع لشخص عمره عند توقيع العقد

35 عاماً تستحق أولى الدفعات بعد 26 عاماً من توقيع العقد و تستمر ما دام الشخص على قيد الحياة .

7- أوجد قيمة القسط الصافي الوحيد لدفعات تقاعدية سنوية لشخص عمره عند الاتفاق 40 عاماً ، تستحق أولى الدفعات التقاعدية لحظة بلوغه الستين و تستمر طيلة بقائه على قيد الحياة قيمة كل دفعة 200000 (احسب على أساس الدفعات عادية) (و احسب على أساس الدفعات فورية) .

8- أعد التمرين السادس بفرض أن الشخص عمره عند توقيع العقد 45 عام ، ماذا تستنتج ؟

9- أعد التمرين السادس بفرض أن الدفعات فورية .

10- أوجد القسط الوحيد الصافي الذي يجب دفعه من قبل شخص عمره عند توقيع العقد 20 عاماً و ذلك لكي يستلم دفعات عادية سنوية مؤقتة لمدة 30 عاماً قيمة كل دفعة 200000 ل.س (تتوقف الدفعات بوفاة الشخص أو بانتهاء الـ 30 عام من بدء التوقيع أيهما أقرب) .

11- أعد التمرين العاشر وبفرض أن الدفعات فورية سنوية مؤقتة لمدة 30عاماً ،ماذا تستنتج؟

12- اتفق شخص (30 عاماً) على أن يستلم من شركة التامين دفعات سنوية مؤجلة و مؤقتة قيمة كل منها 300000 ل.س تستحق أولى الدفعات بعد 15 عاماً من هذا الاتفاق ، وتستمر الدفعات مادام الشخص على قيد الحياة و حتى بلوغه الخامسة و الستين من العمر عندها تستحق آخر الدفعات إذا بقي حتى ذلك على قيد الحياة،احسب قيمة القسط الصافي الوحيد لهذا الاتفاق (احسب على أساس الدفعات عادية أولاً و على أساس الدفعات فورية ثانياً) . ماذا تستنتج ؟

13- أوجد القيمة الحالية (القسط الصافي الوحيد) لدفعات شهرية عادية تـدفع لشخص عمره 40 عاماً قيمة كل دفعة 10000 ل.س تستحق أول دفعة بعد شهر من حساب القيمة الحالية و الثانية بعد شهرين ، تتوقف الدفعات بوفاة الشخص فقط .

14- أعد التمرين السابق و بفرض أن الدفعات شهرية فورية .

15- أعد التمرينين الثالث عشر و الرابع عشر و بفرض أن الدفعات ربع سنوية.

16- احسب قيمة القسط الصافي الوحيد الواجب دفعه ثمناً لوثيقة تأمين تشترط أن تدفع الشركة للمؤمن له دفعات نصف سنوية قيمة كل دفعـة 5000 $ بحيـث تكون الدفعة الأولى بعد ستة أشهر من بلوغ المؤمن له سن الستين ، و تتوالى الدفعات مدى الحياة (إذا علمت أن عمر المؤمن له عند صدور الوثيقة 35 سنة) .

17- احسب القسط الصافي الوحيد الواجب دفعه من قبل شخص (40 عامـاً) للحصول على تامين راتب ربع سنوي قدره 2000 $ بحيث يبدأ أول راتب في نهاية الربع التالي لتوقيع العقد و يستمر الراتب بحيث يتوقف إذا تحقق أحد الشرطين :

إما بوفاة الشخص أو ببلوغه سن السبعين من العمر أيهما أقرب.

18- احسب القسط الصافي الوحيد الواجب دفعه من قبل الشخص (30 عاماً) و ذلك لكي:

أ- تأمين مبلغ قدره 50000 $ يدفع للشخص و ذلك عند بلوغـه سـن الخامسة و الستين.

ب- تأمين راتب تقاعدي شهري قيمة كل دفعة شهرية 500 $ بحيث يبدأ أول راتب بعد شهر من بلوغه سن الخامسة و الستين من العمر (جميع الدفعات تشترط بقاء الشخص على قيد الحياة) .

19- أعد التمرين السابق بحيث تكون الفقرة (ب) بأن يبدأ أول راتب شهري لحظة بلوغ الشخص سن الخامسة و الستين.

20- أراد أب أن يؤمن لابنه دفعات شهرية قيمة كل منها 10000 ل.س أثناء خدمته الإلزامية في الجيش ، إذا علمت أن الخدمة الإلزامية تستمر لمدة عامين متواصلين ، و أن عمر الابن أثناء توقيع الوثيقة 18 عاماً و أنه سوف يذهب إلى الجيش عند بلوغه سن الرابعة والعشرين من العمر (بعد انتهائه من الدراسة الجامعية) ، احسب القسط الوحيد الصافي الواجب دفعه إذا كانت :

أ- الدفعات الشهرية عادية ب- الدفعات الشهرية فورية

21- بسبب الغلاء في المعيشة من سنة لأخرى أراد أحد الأشخاص أن يؤمن على دفعات سنوية غير منتظمة قيمة كل دفعة تزيد عن الدفعة السابقة لها بمقدار 500 $ إذا علمت أن الدفعة الأولى تستحق لحظة توقيع العقد و قيمتها 500 $ ، احسب القسط الصافي الوحيد الواجب دفعه من قبل هذا الشخص (عمره عند التوقيع 50 سنة) .

22- أراد احد الأشخاص أن يضمن له راتباً تقاعدياً شهرياً قيمته 2000 $ يستحق أول دفعة منه بتاريخ بلوغه الخامسة و الستين من العمر مقابل أن يدفع الشخص بتاريخ توقيع الوثيقة مبلغاً قدره 10000 $ و يدفع بعد عام من تاريخ التوقيع 30000 $ ويؤدي ما يتبقى عليه من التزامات بعد عامين من تاريخ الوثيقة ، أوجد ما يجب أن يدفعه الشخص في دفعته الثالثة هذه (إذا علمت أن عمر الشخص عند توقيع الوثيقة 40 سنة) .

مراجعة

قاعدة التكلفة:
القيمة الحالية للالتزامات المتوقعة لشركة التأمين = الالتزامات المؤمن له (القيمة الحالية)

١- $_nE_x$:

القسط الصافي الوحيد (القيمة الحالية) لوثيقة تأمين وقفية بحتة تلتزم بموجبها شركة التأمين (المؤمن) بدفع وحدة نقدية واحدة إلى المستأمن (المؤمن له) الذي عمره x عام عند حساب القسط (القيمة الحالية) بشرط بقاء x على قيد الحياة لعدد n سنة (حتى وصوله إلى العمر x+n سنة) إذا توفي خلال فترة الـ n سنة لا تدفع شركة التأمين أي شيء.

$$_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot u^{-x}$$

$$= {}_nP_x \cdot u^{-x}$$

$$_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \; ; \; D_x = l_x u^{-x} \; ; \; D_{x+n} = l_{x+n} u^{-(x+n)}$$

$u = 1+i$

توجد D_x في جداول الرموز الحسابية $u^{-x} = (1+i)^{-x} = \frac{1}{(1+i)^x}$

(الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق دفعات الحياة)

٢- a_x:

القسط الوحيد الصافي (القيمة الابتدائية) لدفعات سنوية متساوية متعلقة بحياة x كل منها وحدة نقدية واحدة، تستحق الأولى منها في نهاية السنة الأولى اعتباراً من بدء التأمين والثانية في نهاية السنة الثانية ... تستمر الدفعات طيلة بقاء x على قيد الحياة (المؤمن له) وتتوقف بوفاته

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{N_x} \; ; \; N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_\omega$$

$$D_x = l_x u^{-x}$$

$\ddot{a}_x$

٣- $\ddot{a}_x$:

الفصل السابع

الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق التأمين

التي بموجبها تدفع مبالغ التأمين في حالة الوفاة فقط

7.1- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وفاة مدى الحياة

7.2-القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وفاة مدى الحياة مؤجل

7.3- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وفاة مؤقت (محددة)

7.4- القسط الوحيد الصافي للتأمين في حالة الوفاة على مبلغ متغير مع زمن الوفاة

7.5- القسط الوحيد الصافي للتأمين المؤقت في حالة الوفاة ، وذلك على مبلغ متغير مع زمن الوفاة

7.6- تمارين غير محلولة

التأمين في حالة الوفاة: هو التأمين بمبلغ (أو مبالغ) تدفع لورثة المؤمن له في حالة وفاته. نلاحظ أن هذا التأمين يختلف عن المصطلح الشخصي لحماية الناس منه يتحقق بأشكال مختلفة مثال ذلك:

الفصل السابع

الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق التأمين

التي بموجبها تدفع مبالغ التأمين في حالة الوفاة فقط

بعد أن تعلمنا كيفية إيجاد القسط الوحيد الصافي لأية وثيقة تأمين تلزم الشركة دفع مبلغ التأمين بشرط بقاء المستأمن على قيد الحياة وللحالات المختلفة، سنعالج في هذا الفصل كيفية حساب الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق التأمين التي تشترط وفاة المستأمن خلال مدة التأمين، حيث يدفع مبلغ التأمين للورثة في نهاية السنة التي تحصل فيها الوفاة ، و القسط يتم تسديده لحظة توقيع العقد و دفعة واحدة.

7.1- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وفاة مدى الحياة:

لنرمز بـ A_x للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شركة التأمين بدفع مبلغ قدره وحده نقدية واحدة إلى ورثة المستأمن (الذي في لحظة توقيع العقد يكون عند العمر x) ، وذلك في نهاية السنة التي تحصل فيها وفاته.

لإيجاد A_x ننطلق من افتراض أساسي وهو أنه بعد مرور عام على التعاقد سوف يترتب على الشركة دفع مبلغ التأمين (وحده نقدية واحده) لكل حالة وفاة تحصل خلال السنة التالية للتعاقد، أي لكل من بلغ العمر x و لم يصل إلى العمر $x+1$، وبالتالي سوف تدفع d_x وحدة نقدية.

أما بعد مرور عامين على التعاقد ستدفع الشركة d_{x+1} وحده نقدية وهكذا.... بعد مرور $\omega-1$ عام ستدفع $d_{\omega-1}$ وحدة نقدية، ويمكن القول بشكل عام إنه سيدفع d_ω وحدة نقدية، ~~ويمكن القول بشكل عام إنه سيدفع d_ω وحدة نقدية.~~

إن مجموع تلك المبالغ المترتبة على الشركة تشكل التزامات الشركة، أما التزامات المؤمن لهم (المستأمنين) فنفترض أنه يوجد عند التعاقد (بدء الزمن) L_x مستأمن ، وكل منهم سيدفع قسطاً قدره A_x وبالتالي تشكل التزامات المؤمن لهم المقدار:

$$L_x \cdot A_x$$

و بتطبيق القاعدة القائلة بأن التزامات المؤمن لهم يجب أن تساوي القيمة الحالية للالتزامات المتوقعة لشركة التأمين، نجد:

$$L_x \cdot A_x = d_x \cdot u^{-1} + d_{x+1} \cdot u^{-2} + \ldots.. + d_\omega \cdot u^{-(\omega-x+1)}$$

$$A_x = \frac{d_x \cdot u^{-1} + \ldots. + d_\omega \cdot u^{-(\omega-x)}}{L_x}$$

بضرب البسط والمقام بـــ u^{-x} نلاحظ بأنّ:

$$A_x = \frac{d_x \cdot u^{-(x+1)} + d_{x+1} \cdot u^{-(x+2)} + \ldots. + d_\omega \cdot u^{-(\omega+1)}}{L_x \cdot u^{-x}}$$

و كما اصطلحنا عند معالجة موضوع جداول الرموز الحسابية، فإن البسط هنـــا ما هو إلا M_x وأن المقام ما هو إلا D_x و بالتالي:

$$\boxed{A_x = \frac{M_x}{D_x}} \qquad [1]$$

وعندما نريد أن يكون مبلغ التأمين مساوياً لــ c وحدة نقدية، يكون القسط الوحيد الصافي مساوياً إلى:

$$\boxed{C \cdot A_x = C\frac{M_x}{D_x}} \qquad [2]$$

مثال:

رغب شخص عمره 41 سنة في تأمين مبلغ لزوجته إذا بقيت على قيد الحيـــاة بعد وفاته. توجه إلى إحدى شركات التأمين و اشترى وثيقة تأمين على حياته تلتـــزم

وفقها الشركة بدفع مبلغ 000 1000 ل.س إلى زوجته في نهاية السنة التي تحصل فيها وفاته. احسب القسط الوحيد الصافي للوثيقة.

الحل:

لدينا هنا وثيقة تأمين لمدى الحياة قيمتها $C = 1000000$، قسطها الوحيد الصافي هو $C \cdot A_x$، حيث:

$$C \cdot A_x = C \frac{M_x}{D_x}$$

$$1000000 A_{41} = 1000000 \frac{M_{41}}{D_{41}}$$

$$= 1000000 \frac{6986.6565}{17359.172}$$

$$= 402476.37 \text{ ل.س}$$

مثال:

أعد المطلوب في المثال السابق من أجل شخص عمره 45 سنة.

الحل:

نرى هنا إذا ما كنا سنحصل على قيمة للقسط أكبر أو أقل مما وجدناه في المثال السابق:

$$1000000 A_{45} = 1000000 \frac{M_{45}}{D_{45}}$$

$$= 1000000 \frac{6414.3483}{14583.745}$$

$$= 439828.61 \text{ ل.س}$$

إذاً، مع زيادة العمر (تقدم السن) يصبح ما هو مترتب على المستأمن دفعه كقسط وحيد أكبر، والسبب في ذلك أن عدد السنوات التي سيموت بعدها الشخص يصبح أقل، وبالتالي يقترب أكثر موعد دفع مبلغ التأمين من قبل الشركة ، وهذا يعني ارتفاعاً في القسط المطلوب (كقيمة حالية للمبلغ).

وهنا تجدر الإشارة إلى أن شركات التأمين تكون حذرة عند قبولها بيع هـــذا النوع من الوثائق. نظراً لاحتمال أن يكون وجود المرض لدى المستأمن ومعرفته بقرب موته هو السبب في اللجوء إلى التأمين، أو احتمال تعرض المستأمن مـــشتري الوثيقـــة للقتل (للجريمة) من قبل جهة أو شخص من مصلحته حصول الورثة على مبلغ التأمين.

7.2- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وفاة مدى الحياة مؤجل:

لنرمز بـــ ${}_{m|}A_x$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شـــركة التأمين بتقديم مبلغ وحدة نقدية واحدة إلى ورثة المستأمن (الذي يكون في لحظة توقيع العقد على العمر x)، وذلك إذا حصلت وفاته بعد إتمامه العمر $x+m$ سنة ، ويـــتم الدفع في نهاية سنة الوفاة . إذا توفي المستأمن خلال الفترة الفاصلة بين x و $x+m$ فلا يترتب على الشركة أي التزام.

بإتباع الأسلوب نفسه الذي استخدمناه في تأمين وفاة لمدى الحياة، نلاحظ أن التزام المؤمن لهم هو $L_x \cdot {}_{m|}A_x$ ، أما التزامات الشركة المرتبطة بهذه العقـــود فتكـــون تقديم وحدة نقدية لكل من توفّى خلال السنة $x+m+1$ ، أي لعـــدد المتـــوفين d_{x+m} وبالتالي d_{x+m} وحدة نقديـــة، حيـــث قيمتـــها الحاليـــة في بـــدء الـــزمن هـــي $d_{x+m} \cdot u^{-(m+1)}$. ثم تقـــديم d_{x+m+1} وحـــدة نقديـــة بقيمـــة حاليـــة تعـــادل $d_{x+m+1} \cdot u^{-(m+2)}$ وهكذا.... حتى تقديم d_ω وحدة نقدية بقيمـــة حاليـــة تعـــادل $d_\omega \cdot u^{-(\omega-x+1)}$ وبالتالي يجب أن يتحقق لدينا:

$$L_x \cdot {}_{m|}A_x = d_{x+m} \cdot u^{-(m+1)} + d_{x+m+1} \cdot u^{-(m+2)} ..... + d_\omega \cdot u^{-(\omega-x+1)}$$

$${}_{m|}A = \frac{d_{x+m} \cdot u^{-(m+1)} + d_{x+m+1} \cdot u^{-(m+2)} + ... + d_\omega \cdot u^{-(\omega-x+1)}}{L_x}$$

بضرب البسط والمقام بـــ u^{-x} نجد أنّ:

$$_{m|}A = \frac{d_{x+m} \cdot u^{-(x+m+1)} + d_{x+m+1} \cdot u^{-(x+m+2)} + ... + d_{\omega} \cdot u^{-(\omega+1)}}{L_x \cdot u^{-x}}$$

البسط ما هو إلا M_{x+m} وبالتالي:

$$_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} \qquad [3]$$

ومن أجل C وحدة نقدية كقيمة لمبلغ التأمين يكون:

$$C \cdot {}_{m|}A_x = C\frac{M_{x+m}}{D_x} \qquad [4]$$

فرضية

ويمكن التعبير عن $_{m|}A_x$ بصيغة أخرى، بأن نقف على محور الزمن عند العمر $x+m$، فإذا بقي المستأمن على قيد الحياة نعتبر أن القيمة الحالية للوحدة النقدية هي A_{x+m}، وبالتالي تكون القيمة الحالية في بدء الزمن (لحظة توقيع العقد) للمبلغ A_{x+m} هو القسط الوحيد الصافي والذي يعادل:

$$_{m|}A_x = {}_mE_x \cdot A_{x+m} \qquad [5]$$

مثال:

تعاقد شخص عمره 46 سنة مع شركة تأمين على أن تدفع لورثته مبلغ 350000 ل.س في نهاية السنة التي يتوفّى فيها، وذلك إذا تمت الوفاة بعد 14 سنة

من تاريخ توقيع العقد، أما إذا توفي قبل الـ 14 سنة فالشركة ليست مسؤولة عن دفع أي مبلغ. احسب القسط الوحيد الصافي.

الحل:

لدينا $x=46\ ;\quad C=350000;\ m=14$

وبالتالي نحن أمام وثيقة تأمين وفاة لمدى الحياة مؤجل بمقدار 14 سنة ، قسطها الوحيد الصافي هو:

$$c\cdot{}_{m|}A_x = c\cdot\frac{M_{x+m}}{D_x}$$

$$350000_{14\,|}A_{46} = 350000\frac{M_{60}}{D_{46}}$$

$$= 350000\frac{4204.0847}{13949.213}$$

$$= 350000(0.301385081) = 105484.78$$ ل.س

مثال:

أوجد القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين لشخص عمره 39 سنة، بموجبها يحصل ابنه الوريث الوحيد على مبلغ 000 600 ل.س إذا توفي بعد سن الخامسة و الستين.

الحل:

لدينا $x=39\ ;\quad C=600000\ ;\quad m=65-39=26$

وثيقة تأمين وفاة لمدى الحياة مؤجل لمدة 26 سنة قسطها الوحيد الصافي يساوي إلى:

$$600000_{26|}A_{39} = 600000\frac{M_{65}}{D_{39}}$$

$$= 600000\frac{3372.952}{18905.091}$$

$$= 600000(0.17841501)$$

$$= 107049.01 \text{ ل.س}$$

7.3- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وفاة مؤقت:

لنرمز بـــ $A_{x\overline{n|}}$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شركة التـــأمين بدفع مبلغ قدره وحدة نقدية واحدة إلى ورثة الشخص (الذي يكون في لحظة توقيـــع العقد موجوداً على العمر x)، وذلك إذا توفي الشخص خلال مدة محددة n سنة تالية لـــ x ، وإذا بلغ الشخص العمر $x+n$ و بقي حياً فلا يترتب على الشركة إي التزام . يتم الدفع في نهاية السنة التي تحصل فيها الوفاة.

وفقاً لهذه الوثيقة، تكون التزامات المؤمن لهم هي:

$$L_x \cdot A_{x\overline{n|}}$$

أما التزامات شركة التأمين فهي تبدأ بـــ d_x وحدة نقدية وقيمتها الحالية في بـــدء الزمن هي $d_x \cdot u^{-1}$، ثم d_{x+1} وحدة نقدية وقيمتها الحالية في بدء الزمن هي $d_{x+1} \cdot u^{-2}$ وهكذا..... فإن آخر التزام يكون مساوياً إلى d_{x+n-1} وحدة نقدية وقيمتها الحالية في بدء الزمن هي $d_{x+n-1}u^{-n}$.

وبالتالي يجب أن يتحقق التالي:

$$L_x \cdot A_{x\overline{n|}} = d_x \cdot u^{-1} + d_{x+1} \cdot u^{-2} + ... + d_{x+n-1} \cdot u^{-n}$$

$$A_{x\overline{n|}} = \frac{d_x \cdot u^{-1} + d_{x+1} \cdot u^{-2} + ... + d_{x+n-1} \cdot u^{-n}}{L_x}$$

$$=\frac{[d_x \cdot u^{-1}+d_{x+1} \cdot u^{-2}+......d_\omega \cdot u^{-(\omega-x+1)}]-[d_{x+n} \cdot u^{-(n+1)}+d_{x+n+1} \cdot u^{-(n+2)}+...+d_\omega \cdot u^{-(\omega-x+1)}]}{L_x}$$

بضرب البسط والمقام بـــ u^{-x} نجد أنّ:

$$=\frac{[d_x \cdot u^{-(x+1)}+d_{x+1} \cdot u^{-(x+2)}+d_{x+n-1} \cdot u^{-(x+n)}+...+d_\omega \cdot u^{-\omega-1}]-[d_{x+n} \cdot u^{-n}+d_{x+n+1} \cdot u^{-(n+1)}+....+d_\omega \cdot u^{-\omega-1}]}{L_x \cdot u^{-x}}$$

نلاحظ أن البسط هو عبارة عن $M_x - M_{x+n}$ وبالتالي:

$$\boxed{A_{x\,\overline{n}|}=\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}} \qquad [6]$$

من العلاقة [6] يمكن أن نكتب:

$$A_{x\,\overline{n}|}=\frac{M_x}{D_x}-\frac{M_{x+n}}{D_x}$$

$$\boxed{A_{x\,\overline{n}|}=A_x - {}_{n|}A_x} \qquad [7]$$

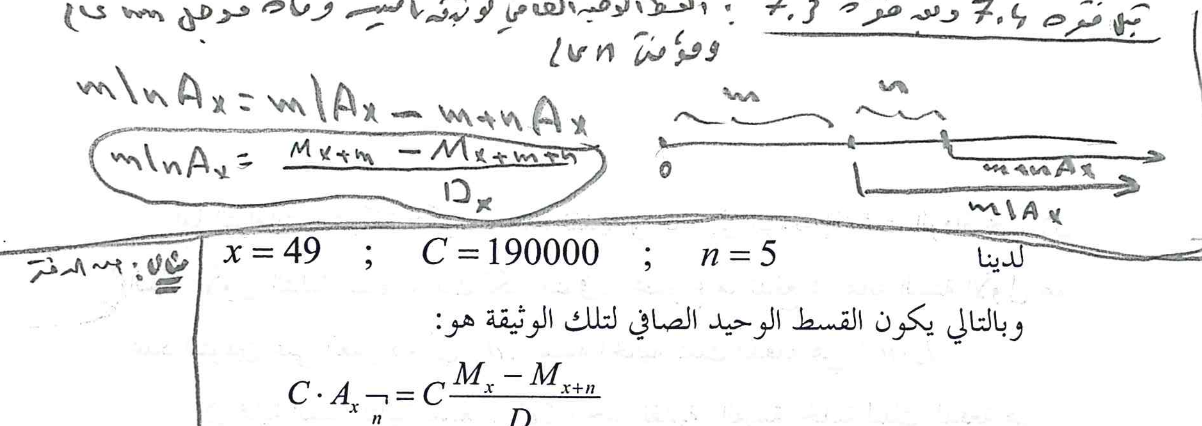
ومن أجل C وحده نقدية ، كقيمة للدفعة الواحدة يكون القسط الوحيد الـــصافي مساوياً إلى:

$$C \cdot A_{x\,\overline{n}|}=C\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \qquad [8]$$

مثال:

احسب القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين مؤقت بـــ خمس سنوات لـــسيدة عمرها 49 سنة إذا علمت أنّ قيمة الوثيقة هي 190000ل.س.

الحل:



لدينا $x = 49 \quad ; \quad C = 190000 \quad ; \quad n = 5$

وبالتالي يكون القسط الوحيد الصافي لتلك الوثيقة هو:

$$C \cdot A_{x\overline{n|}} = C \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$190000 \quad A_{49\overline{5|}} = 190000 \quad \frac{M_{49} - M_{54}}{D_{49}}$$

$$= \frac{5848.6943 - 5126.53}{12171.278} \cdot 190000$$

$= 11273.35$ ل.س

7.4- القسط الوحيد الصافي للتأمين في حالة الوفاة على مبلغ متغير مع زمن الوفاة:

لنرمز بـ $(IA)_x$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شركة التأمين بأن تدفع للشخص (الذي عمره بتاريخ توقيع العقد x عاماً) مبلغ قدره وحده نقدية واحدة إذا وقعت الوفاة خلال العام الأول من تاريخ العقد، ومبلغاً قدره وحدتان نقديتان إذا وقعت الوفاة خلال العام الثاني ، ثلاث وحدات نقدية إذا وقعت الوفاة خلال العام الثالث وهكذا......

من أجل الحصول على قيمة $(IA)_X$ ، نفترض أولاً أن الشركة تدفع في نهاية السنة التي تحصل فيها الوفاة. ثانياً، ننطلق من القاعدة الرئيسية القائلة بأن مجموع التزامات المؤمن لهم يجب أن تساوي القيمة الحالية للالتزامات المتوقعة لشركة التأمين. كالتزامات المؤمن لهم ، نفترض وجود L_x مستأمن وكل منهم سيدفع في بدء الزمن (عند العمر x) مبلغاً (قسطاً) قدره $(IA)_x$، بالتالي مجموع الالتزامات تكون:

$$L_x \cdot (IA)_x$$

أما التزامات الشركة فتكون وحدة نقدية واحدة إلى الورثة إذا تمت الوفاة خـــلال السنة الأولى التالية لـــ x وذلك لكل متوفّى. مجموع ما تدفع في نهاية السنة الأولى هو عدد المتوفين على العمر x، أي d_x. القيمة الحالية لتلك الدفعة هي $d_x \cdot u^{-1}$.

في نهاية السنة الثانية تدفع $2d_{x+1}$ وحده نقدية. القيمة الحالية لتلك الدفعة هي

$$d_{x+1} \cdot u^{-2}$$

وهكذا في نهاية بقية السنوات.....وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$L_x \cdot (IA)_x = d_x \cdot u^{-1} + 2 \cdot d_{x+1} \cdot u^{-2} + 3 \cdot d_{x+2} \cdot u^{-3} + ... + (\omega - x) d_\omega \cdot u^{-(\omega - x)}$$

$$(IA)_x = \frac{d_x \cdot u^{-1} + 2 \cdot d_{x+1} \cdot u^{-2} + 3 \cdot d_{x+2} \cdot u^{-3} + ... + (\omega - x) d_\omega \cdot u^{-(\omega - x)}}{L_x}$$

نضرب البسط والمقام بـــ u^{-x} فنجد:

$$(IA)_x = \frac{d_x \cdot u^{-(x+1)} + 2d_{x+1} \cdot u^{-(x+2)} + 3 \cdot d_{x+2} \cdot u^{-(x+3)} + ... + (\omega - x) d_\omega \cdot u^{-\omega}}{L_x \cdot u^{-x}}$$

$$= \frac{C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + ... + C_\omega}{D_x}$$

يمكن تحليل البسط بالشكل التالي:

$$C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_\omega = M_x$$
$$+ C_{x+1} + C_{x+2} + ... + C_\omega = M_{x+1}$$
$$...$$
$$+ C_\omega = M_\omega$$

بالتعويض في البسط نجد:

$$(IA)_x = \frac{M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + ... + M_\omega}{D_x}$$

وكما اصطلحنا عند الحديث عن جداول الرموز الحسابية، فإنّ البسط هو عبارة عن R_x، أي:

$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x} \qquad [9]$$

من أجل C وحدة نقدية واحدة كدفعة أولى و 2C وحدة نقدية كدفعة ثانية وهكذا.....، يكون القسط الوحيد الصافي مساوياً إلى:

$$C \cdot (IA)_x = C\frac{R_x}{D_x} \qquad [10]$$

مثال:

احسب القسط الوحيد الصافي اللازم لمواجهة التزامات شركة تأمين بأن تدفع لشخص عمره 46 سنة مبلغاً قدره 25000 ل.س إذا توفّى خلال السنة الأولى، 50000ل.س إذا توفّى خلال السنة الثانية و هكذا.... .

الحل:

لدينا $x = 46 \quad ; \quad C = 25000$

بما أن مبلغ التأمين متغير مع زمن الوفاة، فالمطلوب هو $C \cdot (IA)_x$ حيث:

$$C \cdot (IA)_x = C\frac{R_x}{D_x}$$

$$25000(IA)_{46} = 25000\frac{R_{46}}{D_{46}}$$

$$= 25000\frac{131111.62}{13949.213}$$

$$= 25000(9.399212701)$$

$$= 234980.32 \text{ ل.س}$$

7.5– القسط الوحيد الصافي للتأمين المؤقت في حالة الوفاة وذلك على مبلغ متغير مع زمن الوفاة:

لنرمز بــ $(IA)_{x\,\overline{n|}}$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شــركة التأمين بأن تدفع للشخص(الذي عمره بتاريخ توقيع العقد xعام) مبلغاً قدره وحــده نقدية واحدة إذا وقعت الوفاة خلال العام الأول من تاريخ العقد، مبلغاً قدره وحدتان نقديتان إذا وقعت الوفاة خلال العام الثاني، ثلاث وحدات نقدية إذا وقعــت الوفــاة خلال العام الثالث وهكذا.... n وحدة نقدية إذا وقعت الوفاة خلال السنة الأخيرة $x+n$. إذا لم تقع الوفاة لغاية السنة $x+n$ فلا يترتب على الشركة أية التزامــات، الدفعات تتم في نهاية السنة التي تحصل فيها الوفاة.

بإتباع نفس الأسلوب الذي استخدمناه في الفقرة السابقة نحصل على:

$$(IA)_{x\,\overline{n|}} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x} \qquad [11]$$

ومن أجل C وحدة نقدية يكون:

$$C \cdot (IA)_{x\,\overline{n|}} = C\frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x} \qquad [12]$$

إن أهمية القسط الوحيد الصافي المحسوب وفق العلاقتين [11] و [12] تظهر في الاستخدامات المتكررة لدى حساب تكلفة وثائق التأمين التي تتضمن دفــع شــركة التأمين للورثة بمجموع الأقساط الصافية التي دفعت من قبل المؤمن له قبل وفاته وذلــك دون إضافة أية فوائد لتلك الأقساط.

مثال:

اشترى خالد عبد السلام وهو على العمر 41 سنة وثيقة تــأمين مــن شــركة الشرق، تضمن له مبلغ 400000 ل.س عند بلوغه الخامسة والخمسين من العمــر،

وإذا توفي قبل هذا العمر يستحق ورثته في نهاية السنة التي تحصل فيها الوفاة مبلغاً قدره مجموع الأقساط الصافية التي دفعها خالد قبل وفاته.

الحل:

لدينا $\quad x=41 \quad ; \quad C=400000 \quad ; \quad n=55-41=14$

القيمة الحالية للالتزامات المترتبة على شركة التأمين، هي:

$$400000\,{}_{14}E_{41}+P(IA)_{41\,\overline{14}|}$$

القيمة الحالية لالتزامات خالد عبد السلام عند توقيع العقد، هي القيمة الحالية للأقساط المترتبة عليه:

$$P\cdot\partial_{41\,\overline{14}|}$$

وبالتالي:

$$P\cdot\partial_{41\,\overline{14}|}=400000\,{}_{14}E_{41}+P(IA)_{41\,\overline{14}|}$$

$$P\cdot\partial_{41\,\overline{14}|}-P(IA)_{41\,\overline{14}|}=400000\,{}_{14}E_{41}$$

$$P\left[\partial_{41\,\overline{14}|}-(IA)_{41\,\overline{14}|}\right]=400000\,{}_{14}E_{41}$$

$$P=\frac{400000\,{}_{14}E_{41}}{\partial_{41\,\overline{14}|}-(IA)_{41\,\overline{14}|}} \qquad [13]$$

لنوجد $\quad {}_{14}E_{41}$ و $(IA)_{41\,\overline{14}|}$ و $\partial_{41\,\overline{14}|}$

$${}_{14}E_{41}=\frac{D_{41+14}}{D_{41}}=\frac{D_{55}}{D_{41}}=\frac{9100.2134}{17359.172}$$

${}_{14}E_{41}=0.524230844$ ل.س

$$(IA)_{41\,\overline{14}|}=\frac{R_{41}-R_{55}-14M_{55}}{D_{41}}$$

$$= \frac{164609.3 - 79779.5 - 14(4977.8825)}{17359.172}$$

$= 4.599984233$ ل.س

$$\partial_{41 \overline{14|}} = \frac{N_{41} - N_{55}}{D_{41}} = \frac{306729.23 - 121902.36}{17359.172}$$

$= 10.64721693$ ل.س

بالتعويض في العلاقة [13] نجد أنّ:

$$P = \frac{400000(0.524230844)}{10.64721693 - 4.599984233} = \frac{209692.34}{6.0472327}$$

$P = 34675.75$ ل.س

و هو القسط السنوي الصافي.

أما القيمة الحالية (القسط الوحيد الصافي) لمجموعة الأقساط التي ستسترد عند الوفاة هي:

$$P(IA)_{41 \overline{14|}} = 34675.75(4.599984233)$$

$=159509.924$ ل س

7.6- تمارين غير محلولة

1- أوجد قيمة القسط الوحيد الصافي المدفوع من قبل شخص عمره 40 عاماً و ذلك ليؤمن لزوجته بعد وفاته مبلغاً قدره 800000 ل.س و ذلك آخر عام الوفاة ، و إن توفت زوجته قبله فلا تدفع الشركة أي مبلغ .

2- أعد التمرين السابق بفرض أن عمر الشخص 30 عاماً ، ماذا تستنتج ؟

3- عقد تامين ينص على أن تدفع الشركة لورثة المستأمن مبلغاً قدره مليون ليرة سورية في آخر عام وفاته إذا تمت الوفاة بعد عمر الستين ، إذا علمت أن عمر المستأمن عند توقيع العقد هو 25 سنة ، و أنه إذا توفي المستأمن قبل وصوله لعمر الستين فالشركة لا تدفع شيئا .

4- أراد احد المهندسين أن يؤمن على حياته و ذلك أثناء تنفيذه لمشروع سكني ضخم ، إذا علمت أن مدة إنجاز المشروع هو خمس سنوات ، و أن عمره عند توقيع العقد مع شركة التامين هو 43 عاماً و هي لحظة بداية المشروع نفسها و أن المبلغ المراد التامين عليه هو 5000000 ل.س تدفع لورثته في آخر عام وفاته إذا حصلت الوفاة أثناء تنفيذ المشروع فقط ، احسب القسط الصافي الوحيد الواجب دفعه لهذا النوع من التأمين .

5- احسب القسط الوحيد الصافي الواجب دفعه من قبل المؤمن له (60 سنة) لكي تلتزم شركة التأمين بدفع 20000 $ لورثته إذا توفي خلال السنة الأولى و 40000 $ إذا توفي خلال السنة الثانية و 60000 $ إذا توفي خلال السنة الثالثة .... و هكذا .

6- عقد تأمين يشترط أن يدفع المؤمن له (45 سنة) أقساطاً سنوية صافية و ذلك لتأمين مبلغ قدره مليون ليرة سورية تدفع له في حال حياته ، و ذلك عند بلوغه السبعين من العمر، وإذا توفى قبل ذلك فشركة التأمين ستدفع

لورثته في نهاية سنة الوفاة مبلغاً يعادل إجمالي الأقساط السنوية الصافية التي دفعها المؤمن له عندما كان على قيد الحياة ، احسب قيمة القسط السنوي الصافي الواجب دفعه من قبل المؤمن له ثم احسب القيمة الحالية في بدء العقد لمجموع الأقساط التي ستدفع للورثة عند وفاة المؤمن له .

7- عقد تأمين يشترط أن يدفع المؤمن له (40 سنة) أقساطاً سنوية صافية و ذلك لتامين راتب تقاعدي سنوي قيمته 12000 $ يستحق أول دفعاته عند بلوغه الستين من العمر، وإذا توفى قبل ذلك فشركة التأمين تدفع للورثة في آخر عام الوفاة مبلغاً يعادل إجمالي الأقساط الصافية التي دفعها المؤمن له عند حياته ، احسب القسط السنوي الصافي المدفوع من قبل المؤمن له لمدة 20 عاماً و احسب القيمة الحالية لمجموع الأقساط التي ستسترد عند الوفاة و تدفع للورثة .

الفصل الثامن

الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق التأمين التي بموجبها تدفع مبالغ التأمين في حالتي الحياة أو الوفاة (التأمين المختلط)

الفصل الثامن

الأقساط الوحيدة الصافية لوثائق التأمين التي بموجبها تدفع مبالغ التأمين في حالتي الحياة أو الوفاة (التأمين المختلط)

التأمين المختلط هو تأمين لمدة محدودة تلتزم بموجبه شركات التأمين بدفع مبلغ تأمين إلى المؤمن له إذا بقي حيّاً حتى نهاية مدة العقد، أو تدفع مبلغ تأمين آخر إلى الورثة في حالة توفى المؤمن له قبل نهاية مدة العقد.

مبلغ التأمين الذي يستحق للورثة قد يكون مساوياً لمبلغ التأمين الذي يستحق إلى المؤمن له في حالة بقائه حتى نهاية مدة العقد أو مختلفاً عنه .

بشكل عام، وثيقة التأمين المختلط هي حصيلة النوعين التاليين من وثائق التأمين :

النوع الأول– وثيقة تأمين الوقفية البحتة: والتي كما أسلفنا تستوجب من الشركة دفع مبلغ تأمين في حالة بقاء المؤمن له على قيد الحياة في نهاية مدة التأمين.

النوع الثاني– وثيقة تأمين وفاة مؤقت: والتي تستوجب من الشركة دفع مبلغ تأمين إلى الورثة في حالة وفاة المؤمن عليه خلال مدة التأمين.

تبعاً للعلاقة بين مبلغ التأمين الذي يستحق في حالة بقاء المؤمن عليه حيّاً، وبين مبلغ التأمين الذي يستحق في حالة وفاته خلال مدّة التأمين، نميز بين الأنواع المختلفة لوثائق أو لعقود التأمين المختلط. في هذا الإطار نميز بين الأنواع التالية:

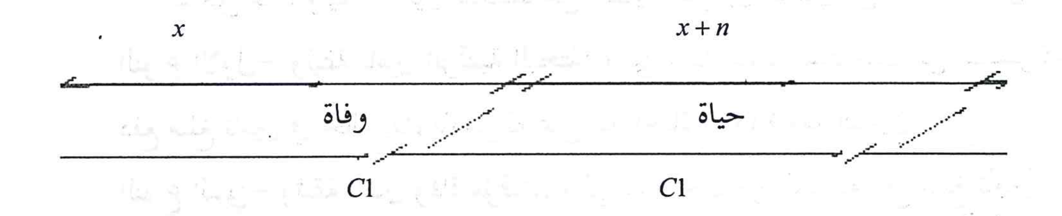
8.1– وثيقة تأمين مختلط عادي:Endowment Insurance Policy

تتيح هذه الوثيقة دفع مبلغ تأمين إلى المؤمن له في حالة بقي على قيد الحياة في نهاية مدة التأمين، أو دفع مبلغ التأمين نفسه إلى ورثته في حال أن توفى المؤمن له خلال مدة التأمين.إذاً، إن مبلغي التأمين متساويان ، ولهذا تسمى الوثيقة بوثيقة تأمين مختلط عادي.

القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين مختلط عادي:

لنرمز بـــ $\overline{A}_{x\,\overline{n}|}$ للقسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تلتزم بموجبها شـــركة التأمين بأن تدفع لورثة شخص عمره x مبلغاً قدره $C1$ إذا بقي على قيد الحياة عنـــد بلوغه العمر $x+n$ (وقفية بحتة) ، أما إذا توفي هذا الشخص قبل إتمامه العمر $x+n$ فتدفع الشركة إلى الورثة المبلغ $C1$ نفسه (وفاة – مؤقت).

لإيجاد $\overline{A}_{x\,\overline{n}|}$ نستعين بمحور الزمن التالي:



إن القسط الوحيد الصافي لوثيقة وقفية بحتة بوجود مبلغ تأمين $C1$ هو:

$$C1 \cdot {}_nE_x$$

أما القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين وفاة مؤقت وبوجود المبلغ نفسه هو:

$$C1 \cdot A_{x\,\overline{n}|}$$

وبالتالي، يكون القسط الوحيد الصافي لوثيقة التأمين المختلط العادي مساوياً إلى:

$\overline{A}_{x\,\overline{n}|}$ ، وبالتالي:

$$\overline{A}_{x\,\overline{n}|} = c1 \cdot {}_nE_x + C1 \cdot A_{x\,\overline{n}|}$$

$$= c1\frac{D_{x+n}}{D_x} + c1\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$\overline{A}_{x\,\overline{n|}} = c1\frac{D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{D_x} \qquad [1]$$

مثال:

تعاقد مدير إحدى الشركات مع شركة تأمين على وثيقة تأمين تلتزم بموجبها الشركة بـــ:

1-دفع 250000 ل.س له شخصياً إذا بقي على قيد الحياة عند السن 60.

2-دفع 250000 ل.س إلى الورثة إذا توفي قبل بلوغه سن الستين من العمر.

احسب القسط الوحيد الصافي لتلك الوثيقة، إذا علمت أن عمر الشخص المذكور هو 45 سنة.

الحل :

لدينا: $x = 45 \;;\; n = 60 - 45 = 15 \;;\; C1 = 250000$

والتأمين هنا، تأمين مختلط عادي قسط الوثيقة الوحيد الصافي هو:

$$\overline{A}_{x\,\overline{n|}} = c1\frac{D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{D_x}$$

$$\overline{A}_{x\,\overline{n|}} = 250000\frac{D_{60} - M_{60} + M_{45}}{D_{45}}$$

$$= 250000\frac{6938.2292 - 4204.0847 + 6414.3483}{14583.745}$$

$$= 250000(0.627307512)$$

$$= 156826.88 \text{ ل.س}$$

مثال:

أحد اللاعبين الرياضيين البالغ من العمر 39 سنة يريد شراء وثيقة تأمين تضمن له التالي:

1- مبلغ 600000 ل.س إذا بقي على قيد الحياة عند سن الستين من العمر.

2- مبلغ 350000 ل.س لزوجته إذا حدث وإن توفّي قبل ذلك العمر.

3- مبلغ 250 000 ل.س للابن الوحيد إذا حدث و توفي قبل ذلك العمر.

احسب القسط الوحيد الصافي للوثيقة.

الحل:

لدينا $x = 45 \;\; ; \;\; n = 60 - 39 = 21 \;\; ; \;\; C1 = 600000$

ونلاحظ أن المبلغ المستوجب دفعه بموجب الوقفية البحتة يساوي مجموع المبالغ المستوجب دفعها إذا حصلت الوفاة، وبالتالي نكون أمام وثيقة تأمين مختلط عادي قسطها الوحيد الصافي $C1 \cdot \overline{\mathrm{A}}_{x\,\overline{n|}}$ حيث:

$$\overline{\mathrm{A}}_{x\,\overline{n|}} = c1 \frac{D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{D_x}$$

$$= 600000 \frac{D_{60} - M_{60} + M_{39}}{D_{39}}$$

$$= 600000 \frac{6938.2292 - 4204.0847 + 7280.5947}{18905.091}$$

$$= 600000(0.529737688)$$

$$= 317842.61 \quad \text{ل.س}$$

8.2- وثيقة تأمين مختلط مضاعف:

وهي الوثيقة السابقة ذاتها، حيث تتميز بوجود اختلاف بين مبلغ التأمين الذي يدفع بموجب الوقفية البحتة c1 وبين مبلغ التأمين الذي يدفع بموجب تـأمين الوفـاة

المؤقت c2، حيث يكون c1=2c2 أي الضعف، ومن هنـــا سمِّـــي تـــأمين مخـــتلط مضاعف.

القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين مختلط مضاعف :

لنرمز بـــ $\overline{A}^{2}_{x\,\overline{n|}}$ إلى القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين تـــضمن أن تقـــوم الشركة بدفع مبلغ قدره $C1$ إلى المؤمن له في حال بقي على قيد الحياة خلال الفتـــرة $x+n$ (المؤمن عمره x عند توقيع العقد)، وإذا توفي قبل بلوغه العمـــر $x+n$ تـــدفع الشركة مبلغاً قدره نصف المبلغ الذي ستدفعه في حال بقي حيّاً، (انظر محور الـــزمن التالي):

x — $x+n$

وفاة — حياة

$C2$ — $C1 = 2C2$

إذاً، القسط الوحيد الصافي في هذه الحالة يعطى بالشكل:

$$\overline{A}^{2}_{x\,\overline{n|}} = C1 \cdot {}_{n}E_{x} + C2 \cdot A_{x\,\overline{n|}}$$

$$= 2C2\frac{D_{x+n}}{D_x} + C2\frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$\boxed{\overline{A}^{2}_{x\,\overline{n|}} = C2\left[\frac{2D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{D_x}\right]} \qquad [2]$$

مثال:

اشترى شخص عمره 34 سنة وثيقة تأمين مدتها 25 سنة تضمن لـــه شخـــصياً الحصول على مبلغ 500000 ل.س إذا بقي على قيد الحياة في نهاية مـــدة التـــأمين، أودفع نصف هذا المبلغ إلى ورثته. و المطلوب حساب القسط الوحيد الصافي للوثيقة.

إذا وفاة

الحل:

لدينا: $x=34 \quad ; \quad c2=250000 \,; \, c1=500000 \quad ; n=25$

وبالتالي نحن أمام وثيقة تأمين مختلط مضاعف كون $c1 \neq c2$، قسطها الوحيد الصافي هو $\overline{A}^{2}_{x \,\overline{n}|}$ ، حيث:

$$\overline{A}^{2}_{x \,\overline{n}|} = c2\left[\frac{2D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{D_x}\right]$$

$$= 250000\left[\frac{2D_{59} - M_{59} + M_{34}}{D_{34}}\right]$$

$$= 250000\left[\frac{2(7345.8139) - 4363.2603 + 8055.4641}{23312.405}\right]$$

$$= 250000(0.0.788585802)$$

$= 197146.45$ ل.س

8.3- وثيقة تأمين مختلط نصفي:

وهذه الوثيقة تفرض على شركة التأمين التزامات عكس ما تفرضه وثيقة التأمين المختلط المضاعف، إذ تتحقق بين مبلغي التأمين العلاقة : $C2 = 2C1$ حيث $C1$ هو مبلغ التأمين المتعلق بالبقاء على قيد الحياة، $C2$ هو مبلغ التأمين المتعلق بالوفاة، وذلك كما هو موضح على محور الزمن التالي:

x $x+n$

وفاة   حياة

$C2 = 2C1$ $C1$

لنرمز للقسط الوحيد الصافي لهذه الوثيقة بـــ $\overline{A}^{h}_{\overline{x}\, \overline{n}|}$ فيكون لدينا:

$$\overline{A}_{\frac{h}{x}\, \overline{n}|} = C1 \cdot {}_{n}E_{x} + C2 \cdot A_{x\, \overline{n}|}$$

$$= C1 \frac{D_{x+n}}{D_x} + 2C1 \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$\boxed{\overline{A}^{h}_{\overline{x}\, \overline{n}|} = C1\left[\frac{D_{x+n} + 2(M_x - M_{x+n})}{D_x}\right]} \quad [3]$$

وهكذا يمكن أن تكون العلاقة بين $C1$ و $C2$ أي نسبة أخرى ، لذلك يطلق على هذا النوع من التأمين المختلط: التأمين المختلط النسبي والذي قد يكون مضاعفاً أو نصفياً أو أية تسمية تدل على وجود نسبة أخرى أو علاقة أخرى بين $C1$ و $C2$.

مثال:

اشترى شخص عمره 42 سنة وثيقة تأمين تتيح له الحصول على مبلغ 200000 ل.س إذا بلغ من العمر 50 سنة ، وإذا توفي قبل ذلك يحصل ورثته على ضعف هذا المبلغ ،أوجد القسط الوحيد الصافي للوثيقة.

الحل:

لدينا $x = 42 \;;\; C1 = 200000;\; C2 = 400000;\; n = 8$

بالتالي نحن أمام وثيقة تأمين مختلط نصفي كون $C1 = C2/2$ قسطها الوحيد الصافي هو $\overline{A}^{1}_{\overline{x}\, \overline{n}|}$ ، حيث:

$$\overline{A}^{h}_{\overline{x}\, \overline{n}|} = c1\left[\frac{D_{x+n} + 2(M_x - M_{x+n})}{D_x}\right]$$

$$\overline{A}^{h}_{\overline{42}\,\overline{8}|} = 200000\left[\frac{D_{50} + 2(M_{42} - M_{50})}{D_{42}}\right]$$

$$= 200000\left[\frac{11617.341 + 2(6841.8881 - 5706.3469)}{16627.378}\right]$$

$$= 200000(0.835274413)$$

$= 167054.88$ ل.س

مثال:

شترى شخص عمره 38 سنة وثيقة تأمين تتضمن المزايا التالية:

1- أن يحصل بنفسه على مبلغ 300 000 ل.س إذا بقي على قيد الحياة عند العمر 48 سنة.

2-أن تحصل زوجته على مبلغ 300 000 ل.س إذا توفي قبل وصوله العمر 48 سنة.

3-أن يحصل ابنه على مبلغ 300 000 ل.س أيضاً إذا توفي قبل وصوله العمر 48 سنة.

الحل:

لدينا: $x = 38$; $C1 = 300000$; $C2 = 300000 + 300000 = 600000$; $n = 10$

وبما أن $C1 = C2/2$ ، فهذا يعني أن الوثيقة هي وثيقة تأمين مختلط نصفي،

قسطها الوحيد الصافي $\overline{A}^{h}_{\overline{x}\,\overline{n}|}$ ، حيث:

$$\overline{A}^{h}_{\overline{38}\,\overline{10}|} = 300000\left[\frac{D_{48} + 2(M_{38} - M_{48})}{D_{38}}\right]$$

$$= 300000\left[\frac{12743.812 + 2(7430.384 - 5990.279)}{19721.80}\right]$$

$= 300000(0.792220852)$

$= 237666.26$ ل.س

إذاً نحن معنيون دائماً بقيمة $C2$، أي بقيمة مبلغ التأمين في حالة الوفـاة، إذ نقارن به قيمة $C1$ فإذا كانت $C1$ ضعف $C2$ فهذا يشير إلى وجـود تـأمين مختلط مضاعف، وإذا كانت نصف $C2$ فهذا يشير إلى تأمين مختلط نصفي وهكذا.....

هذا ويدخل في إطار وثائق التأمين المختلط كل من وثيقة تـأمين رأس المـال المؤجل مع رد الأقساط ووثيقة تأمين الوفاة المؤقت مع استرداد الأقساط ووثيقة التأمين المختلط مع الاشتراك في الأرباح:

8.4- وثيقة تأمين رأس المال المؤجل مع رد الأقساط :

بموجبها يتم دفع مبلغ التأمين إلى الشخص المؤمن له إذا بقي على قيد الحيـاة حتى نهاية مدة العقد، أما إذا حدثت الوفاة خلال مدة العقد تـرد قيمـة الأقسـاط المدفوعة. حيث أن المبلغ الذي تقوم الشركة بسداده في نهاية مدة العقد يعتـبر مبلـغ تأمين الحياة (الوقفية البحتة)، أما الأقساط التي تقوم الشركة بردهـا في حالـة وفـاة الشخص خلال مدة العقد فيعتبر مبلغ التأمين المؤقت.

8.5 – وثيقة تأمين الوفاة المؤقت مع استرداد الأقساط:

بموجبها تلتزم الشركة بدفع مبلغ التأمين للورثة في حال وفاة المؤمن عليه قبل نهاية مدة التأمين، أما إذا بقي الشخص على قيد الحياة حتى نهاية مدة التـأمين فتقـوم الشركة برد الأقساط المدفوعة، حيث أن شركة التأمين تقوم بدفع مبلغ التأمين في حالة الوفاة خلال مدة التأمين ، وترد الأقساط في حال الحياة حتى نهاية مدة التعاقد.

8.6- وثيقة تأمين مختلط مع الاشتراك في الأرباح:

بموجب هذه الوثيقة يتم دفع مبلغ التأمين للشخص إذا بقي على قيد الحياة حتى نهاية مدة التأمين أو للورثة إذا حدثت الوفاة خلال مدة التأمين، على أن تدفع الأقساط السنوية حتى الوفاة أو حتى انتهاء مدة التأمين، ويكون للمؤمن عليه الحق في الحصول على الأرباح التي توزعها شركة التأمين على حاملي وثائق التأمين المشتركة في الأرباح، ويجوز طلب تصفية هذه الأرباح و صرفها نقداً، وهذا بشرط أن يكون قد سدد الشخص أقساط السنوات الثلاث الأولى كاملةً.

8.7- القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين مركبة :

بالإضافة إلى وثائق التأمين السابقة والتي تم عرضها في إطار الحياة فقط، الوفاة فقط، ثم الحياة أو الوفاة (المختلط)، يمكن التأمين بوثائق كل منها يغطي عدة وثائق، أي كل منها مركب من عدة وثائق.

من أهم تلك الوثائق المركبة، وثيقة التأمين التي بموجبها يجري ضمان الحصول على مبلغ في نهاية مدة التأمين، وكذلك الحصول على راتب تقاعدي كل فترة زمنية محددة.

مثال:

اشترى شخص وهو في العمر 38 سنة وثيقة تأمين تلتزم بموجبها شركة التأمين تقديم التالي:

1- دفع مبلغ 300 000 ل.س في حال بقائه على قيد الحياة عند العمر 50 سنة.

2- دفع مبلغ000 200 ل.س للورثة في حالة وفاة الشخص في أي وقت خلال فترة التقاعد.

3- دفع راتب في نهاية كل سنة قدره25000 ل.س وذلك مدى الحياة وعندما يبلغ سن الستين.

أوجد القسط الوحيد الصافي لتلك الوثيقة.

الحل:

الوثيقة التي تم شراؤها من قبل الشخص هي وثيقة تأمين مركبة من الوثائق التالية:

1- وثيقة تأمين وقفية بحتة مدتها 12 سنة.

2- وثيقة تأمين مدى الحياة.

3- وثيقة تأمين دفعات عادية و مؤجلة بمقدار 22 سنة ولمدى الحياة.

القسط الوحيد الصافي لكل وثيقة من الوثائق السابقة:

1- بالنسبة لوثيقة وقفية بحتة، حيث أن $C1 = 300000 \;;\; n = 12$

$$c1 \cdot {}_nE_x = c1 \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$300000\,{}_{12}E_{38} = 300000 \frac{D_{50}}{D_{38}}$$

$$= 300000 \frac{11617.341}{19721.801}$$

$$= 300000(0.589060857)$$

$$= 176718.26 \text{ ل.س}$$

2- بالنسبة لوثيقة تأمين وفاة لمدى الحياة حيث $C2 = 200000$

$$C2 \cdot A_x = C2 \frac{M_x}{D_x}$$

$$200000 \quad A_{38} = 200000 \quad \frac{M_{38}}{D_{38}}$$

$$= 200000 \frac{7430.384}{19721.801}$$

$$= 200000(0.3767599)$$

$= 75351.98$ ل.س

3- بالنسبة لوثيقة تأمين دفعات عادية، حيث:

$$C3 = 25000;\ m = 60 - 38 = 22$$

$$C3 \cdot {}_{m1}\, a_x = C3 \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$$

$$25000\ {}_{22}\, a_{38} = 25000\ \frac{N_{61}}{D_{38}}$$

$$= 25000 \frac{73913.474}{19721.801}$$

$$= 25000(3.747805)$$

$= 93695.125$ ل.س

القسط الوحيد الصافي للوثيقة المركبة:

$176718.26 + 75351.98 + 93695.125 = 345765.37$ ل.س

مثال:

تعاقدت سيدة عمرها 43 سنة مع شركة المتحدة للتأمين على وثيقة تأمين تتيح لها الحصول على المزايا التالية:

1- تقديم 250 000 ل.س لابنها الوريث الوحيد في حال وفاتها بين العمر 50 و العمر 60 .

2- تحصل بنفسها على 350000 ل.س إذا بقيت على قيد الحياة عند العمر 60

3- تحصل على 35000ل.س في بداية كل عام اعتباراً من سن الستين (إذا بقيت على قيد الحياة) ولمدى الحياة.

الحل:

وفق المعطيات التي لدينا أعلاه، نكون أمام وثيقة تأمين مركبة من ثلاث وثائق:

- **الوثيقة الأولى:** هي وثيقة تأمين وفاة مؤجل ومؤقت،

حيث $C1 = 250000 \;; m = 7 \;;\; n = 10$

القسط الوحيد الصافي لهذه الوثيقة هو:

$$C1 \cdot {}_{m|n}A_x = C1 \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

$$250000\,{}_{7/10}A_{43} = 250000 \frac{M_{50} - M_{60}}{D_{43}}$$

$$= 250000 \frac{5706.3469 - 4204.0847}{15921.81}$$

$$= 250000(0.0943524)$$

$= 23588.1$ ل.س

- **الوثيقة الثانية:** وثيقة تأمين وقفية بحتة مدتها $n = 17$، قيمتها $C2 = 350000$.

القسط الوحيد الصافي لهذه الوثيقة:

$$C2 \cdot {}_nE_x = C2 \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$350000\,{}_{17}E_{43} = 350000 \frac{D_{60}}{D_{43}}$$

$$= 350000\frac{6938.2292}{15921.81}$$

$$= 350000(0.4357688)$$

$$= 152519.08$$ ل.س

- **الوثيقة الثالثة:** وثيقة تأمين دفعات فورية مؤجلة بمقدار

$$C = 35000 \ ; \ m = 60 - 43 = 17$$

القسط الوحيد الصافي هذه الوثيقة:

$$C3\cdot_{m|} \ \partial_x = C3 \cdot \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

$$35000_{17}\partial_x = 35000\frac{N_{60}}{D_{43}}$$

$$= 35000\frac{80851.703}{15921.81}$$

$$= 35000\ (5.0780472)$$

$$= 177731.65$$ ل.س

ويكون القسط الوحيد الصافي للوثيقة المركبة مساوياً إلى:

23588.1 +152519.08+177731.65=353838.83 ل.س

8.7- تمارين غير محلولة

1- قدمت إحدى شركات التأمين إلى أحد رجال الأعمال العرض التالي :

أ- تأمين مبلغ قدره 5000000 ل.س يدفع لورثته في نهاية عام وفاته إذا تمت الوفاة خلال الخمسة عشر عاماً من تاريخ العقد.

ب- تأمين مبلغ قدره 10000000 ل.س يستحق الدفع له فقط و ذلك بعد خمسة عشرة عاماً من تاريخ العقد .

2- إذا علمت أن عمر رجل الأعمال (المؤمن له) 50 عاماً ، أوجد قيمة القسط الوحيد الصافي الواجب دفعه من قبل رجل الأعمال إلى شركة التأمين و ذلك لتنفيذ هذا العقد .

3- ذهب أحد الموظفين (40 عاماً) إلى شركة التأمين ليشتري وثيقة تأمين تنص على تامين مبلغ قدره مليون ليرة سورية يستحق لولده في آخر عام وفاة (الموظف) إذا حصلت الوفاة قبل بلوغه سن الستين من العمر.

تأمين راتب تقاعدي شهري قدره 25000 ل.س يبدأ الراتب التقاعدي لحظة بلوغه (الموظف) سن الستين .

احسب القسط الصافي الوحيد الواجب دفعه من قبل هذا (الموظف) لتحقيق هذه الوثيقة .

4- احسب القسط الصافي الوحيد الواجب دفعه من قبل شخص عمره 32 عاماً لكي يؤمن على :

أ- مبلغ قدره 3000000 ل.س تدفع لورثته في آخر عام وفاته إذا تمت الوفاة قبل وصوله إلى سن الخامسة و الستين .

ب- مبلغ قدره 1500000 ل.س تدفع له عند وصوله إلى سن الخامسة و الستين.

جـ- مبلغ تقاعدي سنوي يستمر مدى الحياة يدفع له بعد عام من وصوله إلى سن

الخامسة و الستين قدره 150000 ل.س .

د- مبلغ قدره 1000000 ل.س يدفع للورثة في آخر عام وفاته إذا تمت وفاته بين العمر 70 و 75 .

5- قدم لأحد الأشخاص (35 سنة) العروض التالية و ذلك من إحدى شركات التأمين:

العرض الأول:

دفع 75000 $ له شخصياً إذا بقي على قيد الحياة عند وصوله إلى سن الخامسة و الخمسين .

دفع 75000 $ لورثته إذا توفي قبل بلوغه سن الخامسة و الخمسين .

العرض الثاني:

دفع 50000 $ له شخصياً إذا بقي على قيد الحياة عند وصوله إلى سن الخامسة و الخمسين .

دفع 100000 $ لورثته إذا توفي قبل بلوغه سن الخامسة و الخمسين .

العرض الثالث:

دفع 100000 $ له شخصياً إذا بقي على قيد الحياة عند وصوله إلى سن الخامسة و الخمسين .

دفع 50000 $ لورثته إذا توفي قبل بلوغه سن الخامسة و الخمسين .

إذا علمت أن الشخص (المؤمن له) أراد العرض ذا القسط الصافي الوحيد الأقل أيّ ا لعروض يجب أن يختار ؟

6- أعد التمرين الرابع و بفرض أن عمر المؤمن له (50 سنة)، ماذا تستنتج ؟

7- أعد التمرين الرابع مضيفاً الفقرة (جـ) التالية و لكل عرض و بالترتيب:

د- دفع 1000 $ شهرياً للمؤمن له عند وصوله إلى سن الستين و تستمر مدى الحياة.

هـ- دفع 13000 $ سنوياً للمؤمن له و ذلك بعد عام من وصوله إلى سن الستين و تستمر مدى الحياة.

و- دفع 2000 $ شهرياً للمؤمن له عند وصوله إلى سن الستين و تستمر الدفعات حتى بلوغه سن الخامسة و السبعين حيث تقف.

احسب القسط الصافي الوحيد الواجب دفعه و لكل عرض على حدا.

الفصل التاسع

الأقساط السنوية الصافية والتجارية

Net annual and gross premiums

9.1 - الأقساط السنوية الصافية:

9.1.1- الأقساط السنوية الصافية لوثائق التأمين في حالة الحياة:

9.1.2 -الأقساط السنوية الصافية لوثائق التأمين في حالة الوفاة:

9.1.3- الأقساط السنوية الصافية لوثائق التأمين المختلط:

9.2- الأقساط السنوية التجارية:

9.2.1- الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين في حالة الحياة:

9.2.2- الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين في حالة الوفاة:

9.2.3- الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين المختلط:

9.2.4- الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين مع استرداد الأقساط:

9.3- تمارين غير محلولة

الفصل التاسع

الأقساط السنوية الصافية والتجارية

إن فكرة سداد الخدمة التأمينية بدفعة واحدة، وهو ما يعبرّ عنـــــه بالقسط الوحيد الصافي، أمرٌ لا يكتسب قدراً ملحوظاً من الواقعية، إذ أنه لو حصل، فهو نادر جداً.

لذلك، الشائع هو سداد الثمن على أقساط سنوية تبعاً لقدرة المؤمن له الماليـــة. وبالتالي إن ثمن تلك الخدمة في تحديده، قد يتفق مع أثمان السلع في بعـــض الجوانـــب. فكما يمكن بيع أحداها نقداً أو تقسيطاً، كذلك التغطية التأمينية يمكن دفع ثمن تكلفتها نقداً أو تقسيطاً، فالثمن النقدي هو القسط الوحيد الصافي، أما الثمن المقسَط فهو قيام المؤمن له بسداد أقساط أول كل سنة ولمدة قد تكون طوال مدة التأمين أو لمدة محدودة منه.

إذا كان الدفع يستمر طيلة مدة العقد، فيكون لدينا قسط سنوي عادي.في حين إذا كان الدفع يستمر لمدة أقل من مدة العقد فيكون لدينا قسط سنوي محدود.

وبشكل عام، القسط يدفع في أول كل سنة ولمدة متفق عليها أو حتى وفاة المـــؤمن عليه أيهما يحدث أولاً.

9.1 – الأقساط السنوية الصافية :

القسط السنوي الصافي هو القسط الذي يتم سداده سنوياً خلال مدة العقد أو لمدة أقل من مدة العقد. و عند الحديث عن قسط صافٍ، فهذا يشير إلى تأثير عوامل فنيـــة محددة للقسط بغض النظر عن العوامل المحددة للقسط التجاري.

ولذلك يطلق على القسط الصافي القسط الفني أو قسط الخطر، وبالتالي فهو يمثـــل تكلفة الخطر، أي تكلفة كافية لسداد الالتزامات قبل حملة الوثائق.من هنا، من المنطـــق

الانطلاق من فكرة التعادل بين ثمن النقدي وثمن التقسيط الذي يصح تطبيقه بالنسبة لأية سلعة. هذا يعني تطبيق المعادلة التالية، من أجل مبلغ تأمين قدره وحده نقدية واحدة:

القيمة الحالية للأقساط السنوية الصافية = قيمة القسط الوحيد الصافي

وبالتالي:

القسط الدوري× القيمة الحالية للدفعة الفورية المؤقتة = قيمة القسط الوحيد الصافي.

إن القيمة الحالية للدفعة(V) هي فورية باعتبار أن القسط يسدد أول كل سنة، وهي مؤقتة كون سداد الأقساط بشكل عام يتم لمدة معينة وذلك بالشكل التالي:

1. في القسط السنوي الصافي العادي، يكون القسط مؤقتاً بـ n سنة، (والتي تساوي مدة التأمين.) وبالتالي تأخذ القيمة الحالية الصيغة:

$$V = \partial_{x\,\overline{n}|}$$

2. في القسط السنوي الصافي المحدود، يكون القسط مؤقتاً بـ K سنة $(K < n)$، أي تأخذ الصيغة التالية:

$$V = \partial_{x\,\overline{k}|}$$

3. هناك حالة خاصة عند دفع الأقساط لمدى الحياة، تكون القيمة الحالية بالصيغة:

$$V = \partial_x$$

إذاً، وبافتراض أن قيمة القسط الدوري تساوي p_1 والقيمة الحالية للدفعة الفورية المؤقتة هي v يكون:

قيمة القسط الوحيد الصافي $= p_1 v$	[1]

ومنه:

$$p_{1} = \frac{\text{قيمة القسط الوحيد الصافي}}{V} \qquad [2]$$

9.1.1- الأقساط السنوية الصافية لوثائق التأمين في حالة الحياة:

1- وثيقة تأمين الوقفية البحتة:

يسدد القسط السنوي وفقاً لهذه الوثيقة لمدة n سنة، أي n مرة ، وبالتالي وبتطبيق العلاقة [2] نجد:

$$p_{1} = \frac{{}_{n}E_{x}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$$

$$= \frac{D_{x+n}/D_x}{(N_x - N_{x+n})/D_x}$$

$$P_1 = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \qquad [3]$$

وهو القسط السنوي الصافي الواجب سداده في أول كل سنة ولمدة n سنة من أجل التأمين على مبلغ قدره وحدة نقدية واحدة تدفع للمؤمن له إذا بقي حياً في نهاية الـــ n سنة.

من أجل مبلغ تأمين قدره c وحدة نقدية، يكون القسط السنوي الصافي الواجب سداده هو:

$$P = c\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \qquad [4]$$

2- وثيقة دفعات مدى الحياة عادية:

سبق و وجدنا أن قسطها الوحيد الصافي هو a_x، أما فيما يتعلق بالقسط السنوي الصافي، فإنه من غير المعقول أن يقوم المؤمن له بتسديد أقساط سنوية للــشركة ، وفي الوقت نفسه تقوم الشركة بتقديم دفعات سنوية له. لذلك فإن ثمن تكلفة هذا النوع من الوثائق يسدد فقط على هيئة قسط وحيد صافٍ و لمرة واحدة.

والكلام نفسه يمكن أن يقال عن وثيقة دفعات الحياة الفورية ذات القسط الوحيد الصافي ∂_x.

3- وثيقة دفعات مدى الحياة عادية مؤجلة:

يمكن شراء هذه الوثيقة بقسط وحيد صافٍ $_{m|}a_x$ وكذلك بأقساط سنوية صافية قيمة كل منها هو:

$$P_1 = \frac{_{m|}a_x}{\partial_{x\overline{m}|}}$$

$$= \frac{N_{x+m+1}}{D_x} \Big/ \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{N_{x+m+1}}{N_x - N_{x+m}}} \quad [5]$$

ومن أجل مبلغ c وحدة نقدية كقيمة للدفعة الواحدة يكون:

$$\boxed{P = c\,\frac{D_{x+m+1}}{N_x - N_{x+m}}} \quad [6]$$

وهي قيمة القسط الذي يدفع في بداية كل سنة من سنوات فترة التأجيــل m أو لحين وفاة المستأمن (المؤمن عليه أو المؤمن له) (أيهما يحدث أولاً).

4- وثيقة دفعات مدى الحياة فورية مؤجلة:

ذات القسط الوحيد الصافي $_{m|}\partial_x$ إن القسط السنوي الصافي لهذه الوثيقة نحصل عليه بالأسلوب بنفسه:

$$P_1 = \frac{_{m|}\partial_x}{\partial_{x\,\overline{m}|}}$$

$$= \frac{N_{x+m}}{D_x} \Big/ \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}} \qquad [7]$$

ومن أجل c وحدة نقدية كقيمة للدفعة الواحدة يكون:

$$\boxed{P = c\frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}} \qquad [8]$$

5-وثيقة دفعات الحياة عادية مؤقتة:

أيضاً و للسبب نفسه الذي ذكرناه سابقاً، لا يمكن شراء هذه الوثيقة إلا بقسط وحيد صاف. وكذلك بالنسبة لوثيقة دفعات مدى الحياة الفورية المؤقتة.

6-وثيقة دفعات الحياة عادية مؤجلة مؤقتة:

حيث قسطها الوحيد الصافي هو $_{m|n}a_x$ القسط السنوي الصافي لهذه الوثيقة يدفع في بداية كل سنة من سنوات فترة التأجيل m ونحصل عليه بالشكل:

$$P_1 = \frac{_{m|n}a_x}{\partial_{x\,\overline{m}|}}$$

$$= \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x} \Big/ \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}$$

$$P_1 = \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{N_x - N_{x+m}} \qquad [9]$$

ومن أجل c وحدة نقدية كقيمة لكل دفعة يكون:

$$P_1 = c\,\frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{N_x - N_{x+m}} \qquad [10]$$

7- وثيقة دفعات الحياة فورية مؤجلة مؤقتة:

يعطى قسطها السنوي الصافي بالشكل:

$$P_1 = \frac{{}_{m|n}\partial_x}{\partial_{x\,\overline{m}|}}$$

$$= \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} \Big/ \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}$$

$$P_1 = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+m}} \qquad [11]$$

مثال:

تعاقد مدير إحدى المدارس البالغ من العمر الآن 39 سنة مع شركة النسر للتأمين، على أن تدفع له الشركة مبلغ 500000 ل.س إذا بقي على قيد الحياة لحين بلوغه الستين من العمر. والمطلوب إيجاد:

القسط السنوي الصافي اللازم لذلك.

القسط السنوي الصافي في حالة رغب في دفع خمسة أقساط فقط.

الحل:

1- لدينا $\quad n = 60 - 39 = 21; \qquad c = 500000; \qquad x = 39;$

وبالتالي فإن القسط السنوي الصافي اللازم لذلك هو قسط وثيقة تأمين وقفية بحتـــة عادي:

$$P = c\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$= 500000\frac{D_{60}}{N_{39} - N_{60}}$$

$$= 500000 \quad \frac{6938.2292}{343752.11 - 80851.703}$$

$$= 500000(0.026391093)$$

$$= 13195.54671 \quad \text{ل.س}$$

2- إن تحديد عدد الأقساط بـــ خمسة $m = 5$، يجعلنا أمام قسط سنوي صـــافٍ محدود قيمته:

$$P = c\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$= 500000\frac{D_{60}}{N_{39} - N_{44}}$$

$$= 500000\frac{6938.2292}{343752.11 - 256820.87}$$

$$= 500000(0.07981284)$$

$$= 39906.42029 \quad \text{ل.س}$$

مثال:

أقدم أحد أعضاء الهيئة التدريسية على التأمين على حياة ابنة البالغ من العمـــر الآن ثمان عشرة سنة، بحيث يضمن له دفعات سنوية قيمة كل منـــها 6 0000 ل.س عنـــد بلوغه سن الخامسة والعشرين. احسب القسط السنوي الصافي في الحالات التالية:

1- يتم تأدية الدفعات السنوية للابنة أول كل سنة .

2- يتم تأدية الدفعات للابنة آخر كل سنة .

3- بافتراض أن الأقساط محددة بخمسة أقساط فقط والدفعات تؤدى أول كل سنة

الحل:

1- بما أن $c = 60000$ $\qquad m = 25 - 18 = 7$ $\qquad x = 18$

فالوثيقة هي وثيقة تأمين دفعات فورية مؤجلة قسطها السنوي الصافي:

$$\begin{aligned} P &= c\frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} \\ &= 60000\frac{N_{25}}{N_{18} - N_{25}} \\ &= 60000\frac{710318.29}{989448.13 - 710318.29} \\ &= 60000(2.544759421) \\ &= 152685.56 \end{aligned}$$

ل.س

2- وثيقة تأمين دفعات عادية مؤجلة قسطها السنوي الصافي:

$$\begin{aligned} P &= c\frac{N_{x+m+1}}{N_x - N_{x+m}} \\ &= 60000\frac{N_{26}}{N_{18} - N_{25}} \\ &= 60000\frac{676602.78}{989448.13 - 710318.29} \\ &= 60000(2.423971511) \\ &= 145438.29 \end{aligned}$$

ل.س

3- بما أن عدد الأقساط محدد بـــسبعة أقساط$(k = 7)$، فإن قيمة القسط السنوي الصافي المحدود هو:

$$P = c\frac{N_{x+m}}{N_x - N_{x+K}}$$

$$= 60000\frac{N_{25}}{N_{18} - N_{23}}$$

$$= 60000\frac{710318.29}{989448.13 - 782031.34}$$

$$= 60000(3.424593978)$$

$$= 205475.6387$$ ل.س

مثال:

مدير إحدى صالات الأزياء البالغ من العمر 26 سنة، اشترى وثيقة تأمين تضمن له الحصول على راتب تقاعدي قدره 200000 ل. س سنوياً، يدفع له لمدة أربع عشرة سنة اعتباراً من بلوغه الأربعين من العمر بشرط أن يظل على قيد الحياة خلال مدة العقد. احسب القسط السنوي الصافي في حالة كون الدفعات فورية ثم في حالة كونها عادية.

الحل:

في حالة كون الدفعات فورية ونظراً لأن $x = 26$ $c = 200000$ مدة التأجيل: $m = 41 - 26 = 15$ ، مدة التأمين: $n = 15$ فنكون أمام وثيقة تأمين دفعات فورية مؤجلة مؤقتة، قسطها السنوي الصافي:

$$P = c\frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$= 200000\frac{N_{41} - N_{56}}{N_{26} - N_{41}}$$

$$= 200000\frac{306729.23 - 112802.15}{676602.78 - 306729.23}$$

$$= 200000(0.524306428)$$

$$=104861.29 \quad \text{ل.س}$$

أما في حالة كون الدفعات عادية:

$$P = c\frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{N_x - N_{x+m}}$$
$$= 200000\frac{N_{42} - N_{57}}{N_{26} - N_{41}}$$
$$= 200000\frac{289370.06 - 104160.14}{676602.78 - 306729.23}$$
$$= 200000(0.500738482)$$
$$= 100147.696 \quad \text{ل.س}$$

9.1.2 –الأقساط السنوية الصافية لوثائق التأمين في حالة الوفاة:

سبق وذكرنا أنه وفقاً لهذه الوثائق يشترط وفاة المستأمن خلال مدة التأمين حتى يستحق مبلغ التأمين. سنعالج بالأسلوب السابق نفسه كيفية الحصول على الأقساط السنوية الصافية لهذه الوثائق.

1 – وثيقة تأمين وفاة لمدى الحياة :

وجدنا أن قسطها الوحيد الصافي هو A_x والذي يدفع مرة واحدة عند التعاقد. في حالة تقسيطٍ ثمن تكلفة هذه الوثيقة فأن قسطها السنوي الصافي يدفع في بداية كل سنة ، ويستمر مادام المستأمن على قيد الحياة ، حيث يتوقف الدفع عند وفاته، وتكون القيمة الحالية للأقساط الصافية السنوية العادية تساوي إلى القسط الوحيد الصافي لدفعات فورية لمدى الحياة مضروباً بقيمة القسط السنوي الصافي p_1 ، أي $p_1 \cdot \partial_x$ وبالتالي فإن:

$$A_x = P_1 \cdot \partial_x$$

ومنه:

$$P_1 = \frac{A_x}{\partial_x}$$

$$= \frac{M_x}{D_x} \Big/ \frac{N_x}{D_x}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{M_x}{N_x}} \qquad [12]$$

ومن أجل مبلغ تأمين يساوي c وحدة نقدية يكون القسط السنوي الصافي العادي مساوياً إلى:

$$\boxed{P = c\frac{M_x}{N_x}} \qquad [13]$$

أما إذا كان القسط السنوي الصافي يدفع في بداية كل سنة و لمدة محـــدودة مـــن السنوات k ، فتكون أمام قسط سنوي صافٍ محدود قيمته الحالية $\partial_{x\overline{k}|}$ وبالتالي تكون قيمة القسط مساوية إلى:

$$P_1 = \frac{A_x}{\partial_{x\overline{k}|}}$$

ومنه نصل إلى أن:

$$P_1 = \frac{M_x}{N_x - N_{x+k}}$$

وبالتالي:

$$\boxed{P = c\frac{M_x}{N_x - N_{x+k}}} \qquad [14]$$

2-وثيقة تأمين وفاة مدى الحياة مؤقت:

حيث التوقيت لمدة n سنة تالية، قسطها الوحيد الصافي وجدنا أنـــه مـــساوٍ إلى $A_{x\overline{n}|}$. القسط السنوي الصافي العادي لهذه الوثيقة:

$$P_1 = \frac{A_{x\overline{n}|}}{\partial_{x\overline{n}|}}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \Big/ \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$\boxed{P_1 = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}} \qquad [15]$$

وبالتالي:

$$P = c\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

أما إذا كان دفع الأقساط محدد بعدد من السنوات k ، فإن القسط السنوي الصافي المحدود يكون مساوياً إلى:

$$\boxed{P = c\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}} \qquad [16]$$

3- وثيقة تأمين وفاة مدى الحياة مؤجّل:

وفترة التأجيل m سنة، قسطها الوحيد الصافي $_{m|}A_x$ ، وإذا كانت دفعات الأقساط السنوية الصافية تتم لمدة تساوي m فنكون أمام قسط سنوي صافٍ عادي قيمته:

$$P_1 = \frac{_{m|}A_x}{\partial_{x\overline{m}|}}$$

$$= \frac{M_{x+m}}{D_x} \Big/ \frac{N_x - N_{x+m}}{D_x}$$

$$P_1 = \frac{M_{x+m}}{N_x - N_{x+m}}$$

وبالتالي:

$$P = c\frac{M_{x+m}}{N_x - N_{x+m}} \qquad [17]$$

أما إذا كانت دفعات الأقساط تتم لفترة أقل من فترة التأجيل m ولتكن k فيكون لدينا قسط سنوي صافٍ محدود قيمته:

$$P = c\frac{M_{x+m}}{N_x - N_{x+k}} \qquad [18]$$

مثال:

أحد العاملين في قطاع النفط والبالغ من العمر 35 عاماً اشترى وثيقة تأمين بمبلـــغ 150000 ل.س تستحق في حالة وفاته في أية لحظة. احسب القسط السنوي الصافي في الحالتين التاليتين:

1- أن يدفع قسطاً سنوياً طيلة بقائه على قيد الحياة. $P\ddot{a}_x = cA_x$

2- أن يدفع قسطاً سنوياً ولمدة اثنتي عشرة سنة فقط. $P\ddot{a}_{x\,\overline{(k)|}} = cA_x$

الحل:

1- بما أن $x = 35$ ، $c = 150000$ ، فالوثيقة هي وثيقة تأمين وفـــاة لمـــدى الحياة قسطها السنوي الصافي عادي وقيمته :

$$P = c\frac{M_x}{N_x}$$

$$= 150000\frac{M_{35}}{N_{35}}$$

$$= 150000\frac{7894.6765}{427856.27}$$

$$=150000(0.018451702)$$

$$=2767.76 \quad \text{ل.س}$$

2- بما أنه قد حدد عدد الأقساط $K=12$ والتأمين لمدى الحياة، فإن القسط السنوي الصافي محدود و قيمته:

$$P=c\frac{M_x}{N_x-N_{x+k}}$$

$$=150000\frac{M_{35}}{N_{35}-N_{47}}$$

$$=150000\frac{7894.6765}{427856.27-213046.93}$$

$$=150000(0.036752016)$$

$$=5512.80 \quad \text{ل.س}$$

مثال:

اشترى أحد اللاعبين الرياضيين البالغ من العمر 31 سنة وثيقة تأمين تضمن لزوجته الحصول على مبلغ 160000 ل.س إذا توفي قبل بلوغه الواحد و الخمسين من العمر. احسب القسط السنوي الصافي في الحالتين التاليتين:

1- القسط السنوي الصافي عادياً.

2- القسط السنوي الصافي محدوداً بـ 10دفعات.

الحل:

بما أن $x=31$ ، $c=160000$ ، ومدة التأمين $n=51-31=20$ والقسط السنوي الصافي العادي هو قسط وثيقة تأمين وفاة لمدى الحياة مؤقت بـ 20 سنة قيمته:

$$P = c\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$= 160000\frac{M_{31} - M_{51}}{N_{31} - N_{51}}$$

$$= 160000\frac{8559.717 - 5563.1042}{527176.7 - 163178.34}$$

$$= 160000(0.0082324898)$$

$$= 1317.20$$ ل.س

2- القسط السنوي الصافي المحدود بـــ 10 دفعات $(k = 10)$:

$$P = c\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}$$

$$= 160000\frac{M_{31} - M_{51}}{N_{31} - N_{41}}$$

$$= 160000\frac{8559.717 - 5563.1042}{527176.7 - 306729.23}$$

$$= 160000(0.013593319)$$

$$= 2174.93$$ ل.س

9.1.3- الأقساط السنوية الصافية لوثائق التأمين المختلط:

بأشكالها العادي و المضاعف و النصفي (النسبي):

1- وثيقة التأمين المختلط العادي:

حيث وجدنا أن قسطها الوحيد الصافي هو $\overline{A}_{x\,\overline{n|}}$ ، وبالتالي و اعتمــاداً علــى الأسلوب نفسه الذي سبق تطبيقه نجد أن القسط السنوي الصافي العادي من أجل مبلغ تأمين قدره c هو:

$$P = c\frac{D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{N_x - N_{x+n}} \qquad [19]$$

أما القسط السنوي الصافي المحدود فيكون:

$$P = c\frac{D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{N_x - N_{x+k}} \quad [20]$$

2- وثيقة التأمين المختلط المضاعف:

حيث القسط الوحيد الصافي $\overline{A}_{\overset{2}{x}\,\overline{n}|}$ يكون القسط السنوي الصافي العـــادي P ،

حيث:

$$P = c\frac{2D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{N_x - N_{x+n}} \quad [21]$$

والقسط السنوي الصافي المحدود:

$$P = c\frac{2D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{N_x - N_{x+k}} \quad [22]$$

3- وثيقة التأمين المختلط النصفي:

القسط السنوي الصافي العادي يساوي إلى:

$$P = c\frac{D_{x+n} + 2(M_x - M_{x+n})}{N_x - N_{x+n}} \quad [23]$$

أما القسط السنوي الصافي المحدود فيعطى بالشكل:

$$P = c\frac{D_{x+n} + 2(M_x - M_{x+n})}{N_x - N_{x+k}} \quad [24]$$

ملاحظة هامة: من خلال العلاقات التي حصلنا عليها [4]، [6]، [8]، [10] ، ومن [14] و حتى [20] بالإضافة إلى [22] و [24] . نستنتج أن القسط السنوي الصافي لأي وثيقة تأمين تساوي إلى:

بسط القسط الوحيد الصافي للوثيقة
قيمة N عند سن الشخص لدى التعاقد ــ قيمة N عند سن الشخص لدى نهاية سداد الأقساط

باستثناء العلاقة [13]، حيث المقام هو قيمة N عند سن الشخص لدى التعاقد.

مثال:

اشترى أحد المهندسين البالغ من العمر حالياً 44 سنة وثيقة تأمين بمبلغ مليون ل.س يستحق الدفع له إذا بقي على قيد الحياة حتى الخامسة و الستين من العمر. وإذا توفّى قبل هذا العمر، فإن المبلغ يؤول إلى زوجته.

أوجد القسط السنوي الصافي العادي ثم القسط المحدود بستة أقساط، والقسط السنوي الصافي إذا أراد شراء وثيقة بمبلغ مضاعف.

الحل:

وفقاً لتلك المعطيات نكون أمام وثيقة تأمين مختلط من أجل $n = 65 - 44 = 21$, $x = 44$ ونظراً لكون الورثة يستحقون المبلغ نفسه عند الوفاة، فالتأمين مختلط عادي قسطه السنوي الصافي العادي:

$$P = c\frac{D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{N_x - N_{x+n}}$$

$$= 1000000\frac{D_{65} - M_{65} + M_{44}}{N_{44} - N_{65}}$$

$$= 1000000\frac{5064.2851 - 3372.952 + 6556.192}{256820.87 - 50014.281}$$

$$= 1000000(0.039880378)$$

$$= 39880.38 \quad \text{ل.س}$$

أما القسط السنوي الصافي المحدود، حيث $k = 6$:

$$P = c\frac{D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{N_x - N_{x+k}}$$

$$= 1000000\frac{D_{65} - M_{65} + M_{44}}{N_{44} - N_{50}}$$

$$= 1000000\frac{5064.2851 - 3372.952 + 6556.192}{256820.87 - 174795.69}$$

$$= 1000000(0.100548698)$$

$$= 100548.6986 \quad \text{ل.س}$$

إن شراء وثيقة بمبلغ مضاعف، يعني أن المهندس يحصل شخصياً على مليوني ل.س إذا بقي على قيد الحياة، وإذا توفي فإن زوجته تحصل على مليون ل.س.

في هذه الحالة نكون أمام وثيقة تأمين مختلط نصفي قسطها السنوي الصافي يساوي إلى:

$$P = c\frac{D_{x+n} + 2(M_x - M_{x+n})}{N_x - N_{x+n}}$$

$$= 1000000\frac{D_{65} + 2(M_{44} - M_{65})}{N_{44} - N_{65}}$$

$$= 1000000\frac{5064.2851 + 2(6556.192 - 3372.952)}{256820.87 - 50014.281}$$

$$= 1000000(0.055272731)$$

$= 55272.73$ ل.س

9.2- الأقساط السنوية التجارية :

سبق وذكرنا أن القسط السنوي الصافي يمثل التزامات الشركة قبل حملة الوثائق، وبالتالي فهو نتيجة تأثير ثلاثة عناصر محدودة له وهي:

احتمالات الحياة والوفاة، معدل الفائدة الفني، مبلغ التأمين

في القسط السنوي التجاري يؤخذ بعين الاعتبار عنصر رابع ألا وهو الأعباء التحميلية، وهي تضم مختلف أنواع المصاريف بما في ذلك الربح الذي ترغب الشركة بتحقيقه وبذلك يكون:

القسط السنوي التجاري = القسط السنوي الصافي + الأعباء التحميلية

تنقسم الأعباء التحميلية إلى:

1- المصاريف الابتدائية:

أو مصاريف التعاقد ، وهي تنفق مرة واحدة عند عملية التعاقد وتشمل مصاريف الإعلان عن التأمين وأهدافه ومصاريف الكشف الطبي على الزبائن وعمولات ومصاريف إعداد وإصدار الوثائق وغيرها. عادة ما تحسب هذه الأعباء على هيئة نسبة معينة من مبلغ التأمين سنرمز لهذه المصاريف بالرمز b .

2- المصاريف الإدارية:

وهي المصاريف التي تنفق بشكل متكرر لإنجاز مختلف الأعمال والنشاطات الإدارية من أجور ومرتبات وإيجار عقارات وثمن كهرباء وماء واتصالات وانترنت وغير ذلك. سنرمز لهذه المصاريف بالرمز m ، وهي تحسب عادة كنسبة من مبلغ التأمين .

3- مصاريف التحصيل:

أي تحصيل الأقساط من الزبائن، وهي متكررة سنوياً وتحسب كنسبة من القسط السنوي التجاري، وبالتالي لكل وثيقة حسب نوع التأمين مصاريف تحصيل تختلف عن غيرها سنرمز لهذه المصاريف بالرمز g.

هذه هي أهم الأعباء التي تحدد القسط السنوي التجاري. هناك أعباء أخرى يجري إضافتها أحيانًا مثل احتياطي طوارئ لمواجهة حالات معينة ، وكذلك نسبة تمثل هامش الربح ،إلا أننا لن نعتبر ذلك في تحديدنا للقسط التجاري هنا .

لنرمز للقسط السنوي التجاري اللازم للحصول على مبلغ تأمين قدره وحدة نقدية واحدة بالرمز P_1'، وانطلاقاً من القاعدة الأساسية القائلة بأن القيمة الحالية للأقساط السنوية التجارية يجب أن تساوي القيمة الحالية للأقساط السنوية الصافية مضافاً إليها القيمة الحالية للأعباء التحميلية، يمكن أن نكتب :

$$P_1'.V = P_1.V + m.V + g.P_1'.V + b \qquad [25]$$

وحيث وكما ذكرنا في السابق :

P_1 - القسط السنوي الصافي الدوري اللازم للحصول على مبلغ تأمين وحدة نقدية واحدة.

V - القيمة الحالية لدفعة فورية مؤقتة.

من العلاقة [25] وبقسمة الطرفين على V نجد:

$$P_1' = P_1 + m + g.P_1' + \frac{b}{V}$$

$$P_1' - gP_1' = P_1 + m + \frac{b}{V}$$

$$P'_1(1-g)=P_1+m+\frac{b}{V}$$

$$\boxed{P'_1=\frac{1}{(1-g)}\left[P_1+m+\frac{b}{V}\right]} \quad [26]$$

وهو القسط السنوي التجاري المقابل لمبلغ تأمين قدره وحدة نقدية واحدة، أما إذا كان لدينا مبلغ تأمين قدره c، فإن القسط السنوي التجاري يصبح P'، حيث:

$$P'=c.P'_1$$

ومنه:

$$\boxed{P'=\frac{c}{1-g}\left[P_1+m+\frac{b}{V}\right]} \quad [27]$$

كما ذكرنا سابقاً في الأقساط السنوية الصافية، إن صيغة الحصول على قيمة V تتغير تبعاً للطريقة التي يتم بها سداد الأقساط.

9.2.1- الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين في حالة الحياة:

سنركز على الأقساط السنوية نظراً لأن الشكل الأكثر شيوعاً والأكثر رغبة من جمهور المؤمن لهم هو السداد كل سنة و بقسط إما عادي أو محدود.

1- وثيقة تأمين الوقفية البحتة: ولمدة n سنة تساوي مدة التأمين، حيث يكون لدينا قسط سنوي تجاري عادي يساوي إلى:

$$P'=\frac{c}{1-g}\left[\frac{D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}+m+\frac{b}{\ddot{a}_{x\,\overline{n|}}}\right]$$

$$P'=\frac{c}{1-g}\left[\frac{D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}+m+b\frac{D_x}{N_x-N_{x+n}}\right]$$

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + m\right] \qquad [28]$$

أما إذا كانت مدة سداد الأقساط هي k سنة، حيث k أقل من مدة التـأمين n ، فنكون أمام قسط سنوي تجاري محدود صيغته نحصل عليه بالشكل:

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + D_{x+n}}{N_x - N_{x+k}} + m\right]$$

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+k}} + m + \frac{b}{\partial_{x\,\overline{k}|}}\right]$$

$$= \frac{c}{1-g}\left[\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+k}} + m + b\frac{D_x}{N_x - N_{x+k}}\right]$$

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + D_{x+n}}{N_x - N_{x+k}} + m\right] \qquad [29]$$

وبشكل عام لإيجاد القسط السنوي التجاري لأية وثيقة تأمين نتبع ما يلي:

أولاً- نوجد القسط السنوي الصافي P_1 .

ثانياً- نوجد القيمة الحالية للدفعة الفورية المؤقتة V .

ثالثاً- نعوض في العلاقة [27] .

مثال:

تعاقد رجل أعمال عمره 31 سنة مع شركة الشرق للتأمين على أن تدفع له شخصياً مبلغ 3500000 ل.س إذا بقي على قيد الحياة لحين بلوغه سن الخمسين.

إذا علمت أن قيمة المصروفات الابتدائية 0.02% من مبلغ التأمين.

و أن قيمة المصروفات الإدارية 0.04% من مبلغ التأمين.

و أن قيمة مصروفات التحصيل 0.03% من قيمة القسط التجاري المحسوب.

والمطلوب:

1- احسب القسط السنوي التجاري المترتب على المستأمن.

2- احسب القسط السنوي التجاري المترتب على المستأمن فيما إذا رغب بدفع تسعة أقساط فقط.

الحل:

1- القسط السنوي التجاري المترتب على المستأمن هو قسط سنوي تجاري عادي لإيجاده نبدأ بحساب القسط السنوي الصافي لوثيقة تأمين وقفية بحتة مدتها n سنة، حيث:

$$n=50-31=19 \quad c=3500000 \quad x=31$$

$$P_1=\frac{D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

$$=\frac{D_{50}}{N_{31}-N_{50}}$$

$$=\frac{11617.341}{527176.7-174795.69}$$

$=0.03296812$ ل.س

وهو القسط السنوي الصافي المقابل لوحدة نقدية واحدة.

القيمة الحالية للدفعة الفورية المؤقتة V :

$$V = \partial_{x\,\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$\partial_{31\,\overline{19|}} = \frac{N_{31} - N_{50}}{D_{31}}$$

$$= \frac{527176.7 - 174795.69}{26386.977}$$

$$= 13.3543532$$ ل.س

نعـــــــــوض في العلاقــــــــــة [27] ، حيــــــــــث

$g = 0.03\%; \qquad m = 0.04\% \qquad b = 0.02\%$

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[P_1 + m + \frac{b}{V}\right]$$

$$= \frac{3500000}{1-0.0003}\left[0.03296812 + 0.0004 + \frac{0.0002}{13.3543532}\right]$$

$$= (3501050.315)(0.033383)$$

$$= 116875.56$$ ل.س

ويمكن الحصول على الجواب نفسه بتطبيق العلاقة [28] التي تعطي قيمة القســط السنوي التجاري مباشرةً:

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_{31} + D_{50}}{N_{31} - N_{50}} + m\right]$$

$$= \frac{3500000}{1-0.0003}\left[\frac{0.0002(26386.977) + 11617.341}{527176.7 - 174795.69} + 0.0004\right]$$

$$=(3501050.315)\left[\frac{10872.18}{352381.01}+0.0004\right]$$

$$=(3501050.315)(0.033383)$$

$$=116875.56$$ ل.س

2- لإيجاد القسط السنوي التجاري المحدد بتسع دفعات $(k=9)$ بتطبيق العلاقة [29]:

$$P'=\frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x+D_{x+n}}{N_x-N_{x+k}}+m\right]$$

$$=\frac{3500000}{1-0.0003}\left[\frac{0.0002(26386.977)+11617.341}{527176.7-324847.01}+0.0004\right]$$

$$=(3501050.315)(0.057443958)$$

$$=201114.19$$ ل.س

9.2.2- الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين في حالة الوفاة:

1- وثيقة تأمين لمدى الحياة:

حيث القسط السنوي التجاري العادي يدفع أول كل سنة ولمدى الحياة أو لحين وفاة المستأمن (أيهما أقرب).

بتطبيق العلاقة [27]:

$$P'=\frac{c}{1-g}\left[\frac{M_x}{N_x}+m+\frac{b}{\partial_x}\right]$$

$$P'=\frac{c}{1-g}\left[\frac{M_x}{N_x}+m+b\frac{D_x}{N_x}\right]$$

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + m}{N_x} + m\right] \quad [30]$$

أما إذا كانت الأقساط ستدفع لمدة K سنة، فيكون لدينا قسط سنوي تجاري محدود صيغته:

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{M_x}{N_x - N_{x+k}} + m + \frac{b}{\partial_{x\overline{K|}}}\right]$$

$$= \frac{c}{1-g}\left[\frac{M_x}{N_x - N_{x+k}} + m + b\frac{D_x}{N_x - N_{x+n}}\right]$$

$$= \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + M_x}{N_x - N_{x+k}} + m\right] \quad [31]$$

2- وثيقة تأمين وفاة لمدى الحياة مؤقت:

وبمدة n سنة، حيث يمكن أن يكون عدد الأقساط مساوياً لمدة التأمين (لمدة التأجيل) وعندها يكون لدينا قسط سنوي تجاري عادي، أو يمكن أن يكون عدد الأقساط أقل من مدة التأمين و بالتالي قسط سنوي تجاري محدود.

أولاً- القسط السنوي التجاري العادي:

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + m + \frac{b}{\partial_{x\overline{n|}}}\right]$$

$$= \frac{c}{1-g}\left[\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + m + b\frac{D_x}{N_x - N_{x+n}}\right]$$

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + m\right] \quad [31]$$

ثانياً– القسط السنوي التجاري المحدود:

بـــ k سنة، حيث $k < n$ صيغته النهائية:

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+k}} + m\right]$$ [32]

مثال:

رغب أحد الممثلين السينمائيين البالغ من العمر 40 سنة شراء وثيقة تأمين وفاة من إحدى شركات التأمين، عُرِضَ عليه إما وثيقة تضمن أن يدفع لزوجته عند وفاته مبلغ 600000 ل.س أو وثيقة مدتها عشرون عاماً بمبلغ تأمين 500000 ل.س يدفع للزوجة نفسها عند وفاته. و المطلوب:

احسب القسط السنوي التجاري للعرض الأول.

احسب القسط السنوي التجاري للعرض الثاني.

حدد مقدار الأعباء التحميلية لكل من العرضين.

احسب القسط السنوي التجاري المحدود بـــ عشر دفعات للعرض الثاني.

مع العلم بأن:

المصاريف الابتدائية3 %

المصاريف الإدارية 5 %

مصاريف التحصيل 2 %

الحل:

لدينا

$c2 = 500000 \quad n = 20 \quad k = 10 \quad b = 0.03 \quad m = 0.05 \quad g = 0.02$

$$x = 40 \qquad c1 = 600000$$

1- القسط السنوي التجاري للعرض الأول والذي هو وثيقة تأمين وفاة لمدى الحياة:

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + M_x}{N_x} + m\right]$$

$$= \frac{600000}{1-0.02}\left[\frac{0.03D_{40} + M_{40}}{N_{40}} + 0.05\right]$$

$$= 612244.9\left[\frac{0.03(18117.781) + 7132.5872}{324847.01} + 0.05\right]$$

$$= 612244.9[0.073629956]$$

$= 45079.57$ ل.س

2- القسط السنوي التجاري للعرض الثاني والذي هو وثيقة تأمين وفاة لمدى الحياة مؤقت بـــ 20 سنة:

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + m\right]$$

$$= \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_{40} + M_{40} - M_{60}}{N_{40} - N_{60}} + m\right]$$

$$= 612244.9\left[\frac{0.03(18117.781) + 7132.5872 - 4204.0847}{324847.01 - 80851.703} + 0.05\right]$$

$$= (612244.9)\left[\frac{3472.04}{243995.31} + 0.05\right]$$

$$= (612244.9)(0.064229929)$$

$= 39324.45$ ل.س

3- الأعباء التحميلية للعرض تساوي القسط السنوي التجاري مطروحاً منه القسط السنوي الصافي و بالتالي:

القسط السنوي الصافي بالنسبة للعرض الأول:

$$P = c\frac{M_x}{N_x} = c\frac{M_{40}}{N_{40}} = 600000\frac{7132.5872}{324847.01} = 13174.06$$

فتكون الأعباء التحميلية مساوية إلى:

$$P' - p = 45079.57 - 13174.06$$

$= 31905.52$ ل.س

القسط السنوي الصافي بالنسبة للعرض الثاني:

$$P = c\frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = c\frac{M_{40} - M_{60}}{N_{40} - N_{60}}$$

$$= 600000\frac{7132.5872 - 4204.0847}{324847.01 - 80851.703}$$

$= 7201.37$ ل.س

الأعباء التحميلية:

$$P' - p = 31905.52 - 7201.37$$

$= 24704.15$ ل.س

4- القسط السنوي التجاري المحدود بـــ عشر دفعات، حيث $k = 10$:

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+k}} + m\right]$$

$$= \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_{40} + M_{40} - M_{60}}{N_{40} - N_{50}} + m\right]$$

$$= 612244.9\left[\frac{0.03(18117.781) + 7132.5872 - 4204.0847}{324847.01 - 174795.69} + 0.05\right]$$

$$= (612244.9)(0.073138989)$$

$= 44778.973$ ل.س

9.2.3- الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين المختلط:

أي الوثائق التي تضمن تغطية تأمينية في حالتي الحياة والوفاة معاً. وهنـــا يمكـــن أن يكون القسط السنوي التجاري عادياً أو محدوداً.

1- القسط السنوي التجاري العادي لوثيقة تأمين مختلط عادي:

بالتعويض في العلاقة [27] نجد:

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{N_x - N_{x+n}} + m + \frac{b}{\partial_{x\overline{n}|}}\right]$$

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{D_{x+n} - M_{x+n} + M_x}{N_x - N_{x+n}} + m + b\frac{D_x}{N_x - N_{x+n}}\right]$$

$$\boxed{P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + m\right]} \qquad [33]$$

حيث تغطي هذه الوثيقة وكما ذكرنا سابقاً، الوقفية البحتة و التـأمين المؤقـت، وعدد الأقساط يساوي مدة التأمين n.

2- القسط السنوي التجاري المحدود لوثيقة تأمين مختلط عادي:

نصل بالأسلوب بنفسه إلى أن:

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+k}} + m\right] \quad [34]$$

مثال:

مروان مساعد مهندس في شركة الإنشاء العسكرية عمره 45 سنة، اشترى وثيقـة تأمين تضمن له الحصول على مبلغ 400000 ل.س إذا بقي على قيد الحيـاة عنـد بلوغه الستين من العمر، وإذا توفي قبل ذلك يستحق ابنه الوريث الوحيد المبلغ نفـسه و المطلوب:

1- احسب القسط السنوي التجاري العادي.

2- احسب القسط السنوي التجاري المحدود بـــ خمسة أقساط.

مع العلم أن الأعباء التحميلية توزع كالتالي:

المصروفات الابتدائية 2% من مبلغ التأمين.

المصروفات الإدارية 4% من مبلغ التأمين.

مصروفات التحصيل 3% من القسط السنوي التجاري.

الحل:

لدينا : $n = 60 - 45 = 15 \quad c1 = c2 = c = 400000 \quad x = 45$

$$k = 5 \quad b = 0.02 \quad m = 0.04 \quad g = 0.03$$

القسط السنوي التجاري العادي لوثيقة تأمين مختلط عادي:

$$P' = \frac{c}{1-g}\left[\frac{b.D_x + D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} + m\right]$$

$$= \frac{400000}{1-0.03}\left[\frac{0.02D_{45} + D_{60} + M_{45} - M_{60}}{N_{45} - N_{60}} + 0.04\right]$$

$$= 412371.13\left[\frac{0.02(14583.745) + (6938.2292) + 6414.3483 - 4204.0847}{241579.89 - 80851.703} + 0.04\right]$$

$$= 412371.13\left[\frac{9440.168}{160728.187} + 0.04\right]$$

$$= 412371.13(0.09873374)$$

$= 40714.95$ ل.س

2- القسط السنوي التجاري المختلط المحدود بـــ خمسة أقساط $(k = 15)$:

نستبدل في مقام العلاقة التي استخدمناها في الطلب الأول N_{50} بـ N_{60} :

وبالتعويض نحصل على:

$$p' = 412371.13\left[\frac{0.02(14583.745) + (6938.2292) + 6414.3483 - 4204.0847}{241579.89 - 174795.69} + 0.04\right]$$

$$= 412371.13\left[\frac{9440.168}{66784.2} + 0.04\right]$$

$$= 412371.13(0.181353314)$$

$$= 74784.87$$

9.2.4- الأقساط السنوية التجارية لوثائق التأمين مع استرداد الأقساط:

سبق و أن تطرقنا إلى هذا النوع من الوثائق، وذلك بالنسبة لوثيقة تأمين رأس المال المؤجل و وثيقة تأمين الوفاة مؤقت.

1- القسط السنوي التجاري لوثيقة تأمين رأس المال المؤجل مع رد الأقساط، حيث التأمين هنا هو تأمين وقفية بحتة والمبلغ هو مبلغ تأمين مؤقت بـ n سنة.

لإيجاد القسط السنوي التجاري، ننطلق من العلاقة [25] ونضيف إلى الطرف الأيمن المقدار $P_1'(IA)_{x\,\overline{n|}}$ ، وهو كما وجدنا سابقاً ، القيمة الحالية لمبلغ يستحق الأداء في نهاية السنة التي تحصل فيها الوفاة للشخص x، حيث يكون المبلغ مساوياً P_1' إذا تمت الوفاة خلال السنة الأولى، $2P_1'$ إذا تمت الوفاة خلال السنة الثانية، وهكذا....

nP_1' إذا تمت الوفاة خلال السنة n.

بالأخذ بعين الاعتبار القيمة الحالية (القسط الوحيد الصافي) للتأمين المؤقت في حالة الوفاة على مبلغ متغير مع زمن الوفاة، يمكننا أن نكتب:

$$P_1'.\mathrm{V} = P_1.\mathrm{V} + \mathrm{m.V} + \mathrm{g.}P_1'.\mathrm{V} + \mathrm{b} + P_1'(IA)_{x\,\overline{n|}}$$

$$P_1'.\mathrm{V} - \mathrm{g.}P_1.\mathrm{V} - P_1'(IA)_{x\,\overline{n|}} = P_1.\mathrm{V} + \mathrm{m.V} + \mathrm{b}$$

$$P_1'.[\mathrm{V} - \mathrm{g.V} - (IA)_{x\,\overline{n|}}] = (P_1 + m)\mathrm{V} + \mathrm{b}$$

$$P_1' = \frac{(P_1 + m)V + b}{(1-g)V - (IA)_{x\,\overline{n}|}}$$

نقسم البسط و المقام على V فنحصل على:

$$\boxed{P_1' = \frac{1}{1 - g - (IA)_{x\,\overline{n}|} \big/ V}\left(P_1 + m + b / V\right)} \qquad [35]$$

إن الصيغة التي يمكن أن نحصل منها على V تتغير تبعاً لطريقة سداد الأقساط. وبما أن الشكل الغالب لسداد الأقساط هو أقساط فورية مؤقتة، فإن القيمــة الحاليــة للدفعــة الواحدة هي $V = \ddot{a}_{x\,\overline{n}|}$ وبالنسبة لوثيقة الوقفية البحتة هذه يكون لدينا إذاً:

1- نحسب P_1 من العلاقة: $P_1 = \dfrac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$

2- نحسب V من العلاقة $V = \ddot{a}_{x\,\overline{n}|} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$

3- نحسب $(IA)_{x\,\overline{n}|}$ من العلاقة: $(IA)_{x\,\overline{n}|} = \dfrac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}$

ومن أجل مبلغ تأمين قدره c وحدة نقدية وبالتعويض في [35] نحصل على:

$$P' = c.P_1'$$

مثال:

اشترى عمر البالغ من العمر 36 سنة وثيقة تأمين بمبلغ 300000 ل.س تستحق عند بلوغه الستين من العمر. وتنص الوثيقة على أنه إذا توفي قبل بلوغ هــذا العمــر

فالشركة تعيد لوريثه المتمثل بزوجته كامل الأقساط التي دفعها، حيث تؤخذ الإضافات التالية بعين الاعتبار:

- المصاريف الابتدائية 3%
- المصاريف الإدارية 2%
- مصاريف تحصيل الأقساط 4%
- والمطلوب حساب القسط السنوي التجاري، إذا علمت أن المستأمن سيدفع أقساطاً عددها 24 قسطاً.

الحل:

لدينا إذاً ومن خلال المعطيات وثيقة تأمين وقفية بحتة مع حق استرداد الأقساط:

$$x = 36 \; ; \; c = 300000 \; ; \; n = 24 \; ; \; b = 0.03 \; ; \; m = 0.02 \; ; \; g = 0.04$$

القسط السنوي التجاري يعطى بالعلاقة:

$$P' = \frac{c}{1\text{-g-}(IA)_{x\,\overline{n}|} / V}(P_1 + m + b/V) \quad *$$

$$'P = \frac{c}{1-g-\frac{(IA)_{x\,\overline{n}|}}{V}}\left[P + m + \frac{b}{V}\right]$$

لنوجد القسط السنوي الصافي P_1 :

$$P_1 = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$= \frac{D_{60}}{N_{36} - N_{60}}$$

$$= \frac{6938.2292}{405493 - 80851.703}$$

$= 0.018492718$ ل.س

ثم القيمة الحالية V:

$$V = \partial_{36\ \overline{24|}} = \frac{N_{36} - N_{60}}{D_{36}}$$

$$= \frac{405493 - 80851.703}{21449.65}$$

$= 15.13504$ ل.س

ثم القيمة الحالية $(IA)_x$:

$$(IA)_{36} = \frac{R_{36} - R_{60} - {}_{24}M_{60}}{D_{36}}$$

$$= \frac{201772.6 - 56415.826 - 24(4204.0847)}{21449.65}$$

$= 2.07270241$ ل.س

نعوض في * فنجد:

$$P' = \frac{300000[0.018492718 + 0.02 + (0.03/15.13504)]}{1 - 0.04 - (2.07270241/15.13504)}$$

$$= \frac{300000[0.04047487]}{0.96 - 0.13694727}$$

$$= \frac{12142.462}{0.82305273}$$

$= 14752.96$ ل.س

إن ارتفاع قيمة القسط الناتجة يعود إلى المبالغة في نسبة المصروفات وبالتحديد مصروفات تحصيل الأقساط.

9.3– الأقساط الشهرية:

سبق و تعرفنا على كيفية إيجاد الدفعات الجزئية التي تستحق عبر فترات زمنية كل منها أقل من سنة. إلا أن الكثير من شركات التأمين تلجأ إلى حساب أقساط التأمين الشهرية من خلال إضافة 5% من القسط السنوي إلى القسط السنوي نفسه ومن ثم قسمة الناتج على 12 .

وكذلك إذا كان المطلوب حساب القسط نصف السنوي يمكن أن يضاف 2% من القسط السنوي إلى القسط السنوي نفسه وقسمة الناتج على 2.

أما لحساب القسط ربع السنوي فيضاف 4% من القسط السنوي إلى القسط السنوي نفسه ويقسم الناتج على 4. وهكذا....

مثال:

باستخدام معطيات المثال السابق ، أوجد القسط الشهري التجاري.

الحل:

لنرمز للقسط الشهري التجاري بـــ p'_{12} فيكون:

$$p'_{12} = \frac{p' + 0.05P'}{12}$$

$$= \frac{14752.96 + 0.05(14752.96)}{12}$$

$$= 1290.88$$ ل.س

9.3- تمارين غير محلولة

1- احسب القسط السنوي الصافي الواجب دفعه من قبل شخص (36 سنة) لشركة التأمين ليؤمن على مبلغ وحيد قدره مليون ليرة سورية تدفع له في حال حياته ، و ذلك عند وصوله لسن الخامسة و الستين من العمر ، ثم احسب القسط السنوي الصافي في حال أراد هذا الشخص دفع عشرة أقساط فقط .

2- زوج أراد أن يؤمن على حياة زوجته البالغة من العمر الآن 20 سنة بحيث يضمن لها دفعات سنوية قيمة كل دفعة 100000 ل.س و ذلك عند وصولها لسن الخامسة و العشرين من العمر مفترضاً أنها :

أ- سوف تستلم الدفعة الأولى أول كل سنة، و تستمر لمدى الحياة و تتوقف الدفعات بوفاتها.

ب- سوف تستلم الدفعة الأولى آخر كل سنة، و تستمر لمدى الحياة و تتوقف الدفعات بوفاتها. احسب القسط السنوي الصافي و المحدد بعشرة أقساط الواجب دفعه من قبل الزوج لتحقيق هذا التأمين.

3- احسب القسط السنوي الصافي الواجب دفعه من قبل شخص عمره عند توقيع عقد تامين (37 سنة) ينص بأن تدفع له شركة التامين دفعات سنوية قيمة كل منها 150000 ل.س ، و ذلك اعتباراً من بلوغه الخمسين من العمر و تستمر لمدة خمس عشرة سنة ثم تتوقف ، يشترط هذا العقد أن يظل الشخص على قيد الحياة و ذلك حتى وصوله لسن الخمسين من العمر ، احسب ذلك القسط السنوي الصافي في حالة كانت تلك الدفعات فورية ثم في حالة كانت الدفعات عادية .

4- أراد أحد الأشخاص (42 سنة) أن يدفع أقساطاً سنوية صافية ليؤمن على مبلغ قدره 2000000 ل.س تستحق لورثته في حالة وفاته ، احسب القسط

السنوي الصافي الواجب دفعه من قبل هذا الشخص و ذلك طيلة بقائه على قيد الحياة ، ثم احسب القسط السنوي الصافي الواجب دفعه من قبل هذا الشخص إذا أراد أن يدفع فقط عشرة أقساط .

5- عرض على أحد الأشخاص (43 سنة) وثيقة تأمين تنص على أن تدفع شركة التأمين لوريثه الوحيد مبلغاً قدره 50000 $ إذا توفي المؤمن له قبل بلوغه السبعين من العمر ، أوجد قيمة القسط السنوي الصافي الواجب دفعه من قبل المؤمن له إذا كان القسط عادياً أولاً ، و إذا كان القسط محدداً بـ سبع دفعات ثانياً .

6- قدم لأحد الأشخاص (35 سنة) العروض التالية، و ذلك من إحدى شركات التأمين:

العرض الأول:

أ- دفع 75000 $ له شخصياً إذا بقي على قيد الحياة عند وصوله إلى سن الخامسة و الخمسين.

ب- دفع 75000 $ لورثته إذا توفي قبل بلوغه سن الخامسة و الخمسين .

العرض الثاني:

أ- دفع 50000 $ له شخصياً إذا بقي على قيد الحياة عند وصوله إلى سن الخامسة و الخمسين.

ب- دفع 100000 $ لورثته إذا توفي قبل بلوغه سن الخامسة و الخمسين .

العرض الثالث:

أ- دفع 100000 $ له شخصياً إذا بقي على قيد الحياة عند وصوله إلى سن الخامسة و الخمسين.

ب- دفع 50000 $ لورثته إذا توفي قبل بلوغه سن الخامسة و الخمسين .

- إذا علمت أن الشخص (المؤمن له) أراد العرض ذا القسط السنوي الصافي الأقل أيٌّ العروض يجب أن يختار ؟

- و إذا أراد (المؤمن له) دفع عشرة أقساط صافية سنوية فقط، فما هي قيمة القسط السنوي الصافي الواجب دفعه و لكل عرض.

7- أعد التمرين السادس و بفرض أن عمر المؤمن له (45 ستة) .

8- احسب القسط السنوي الصافي المفروض دفعه من أحد المؤمنين لهم (35 سنة) و ذلك ليؤمن على راتب سنوي قدره 10000 $ يدفع له لحظة بلوغه سن الخامسة و الستين من العمر إذا علمت أن المؤمن له أراد دفع هذا القسط لمدة 15 سنة فقط (إذا توفي المؤمن له قبل بلوغه سن الخامسة و الستين فلا تدفع شركة التأمين شيئاً) .

9- أعد التمرين الثامن مفترضاً أن المؤمن له أراد دفع الأقساط لمدة 30 سنة.

10- عرضت المؤسسة العامة للتامين العرض التالي على أحد الأشخاص (43 سنة) :

أ- تأمين دفعات سنوية قيمة كل منها 20000 $ تدفع الأولى منها عند بلوغه الخامسة و الخمسين ، و تستمر ما دام المؤمن على قيد الحياة و حتى بلوغه الثامنة و الستين حيث تتوقف تلك الدفعات .

ب- تأمين مبلغ وحيد يدفع للمؤمن له في حال حياته ، و ذلك لحظة بلوغه سن الثامنة و الستين قيمة هذا المبلغ 100000 $.

احسب القسط السنوي الصافي الواجب دفعه من قبل المؤمن له و لمدة أقصاها سبع سنوات.

11- أراد مؤمن له (25 سنة) أن يدفع عشرين قسطاً سنوياً صافياً، و ذلك لتأمين راتب شهري بقيمة 1000 $ بحيث يحصل المؤمن له على أول راتب لحظة وصوله سن الخامسة و الخمسين، أوجد ذلك القسط السنوي الصافي.

12- احسب القسط الشهري الصافي المفروض تسديده لشركة التأمين و لمدة 20 سنة ليؤمن شخص (30 سنة) على ما يلي :

أ- راتب شهري بقيمة 25000 ل.س يتحقق أول راتب بعد شهر من وصوله لسن الخامسة و الخمسين.

ب- مبلغ قدره مليون و نصف ليرة سورية تدفع له شخصياً و ذلك عند وصوله سن الخامسة و الخمسين .

13- أعد جميع التمارين السابقة (ما عدا تمرين رقم 12) و احسب القسط السنوي التجاري

و لجميع الحالات مفترضاً أن:

- المصاريف الابتدائية 0.03
- المصاريف الإدارية 050.
- مصاريف التحصيل 020.

14- أعد التمرينين السادس و السابع من الفصل السابع و احسب قيمة القسط السنوي التجاري مفترضاً أن الإضافات هي الإضافات نفسها في التمرين (13) من هذا الفصل.

الفصل العاشر

احتياطيات التأمين

Insurance Reserves

10.1 -الاحتياطي الرياضي الصافي

10.2-احتياطي التعويضات تحت التسوية

10.3 – احتياطي التعويضات تحت التسديد

10.4 – احتياطي إضافي:

10.5 -المعالجة الرياضية للاحتياطي الرياضي الصافي

10.5.1 - الأسلوب الرجعي

10.5.2- الأسلوب التطلّعي

10.6 - الاحتياطي الحسابي في حالة السداد بقسط وحيد صافٍ

10.7 الاحتياطي الحسابي في حالة السداد بعدد محدد(مؤقت) من الأقساط

10.8- تمارين غير محلولة

الفصل العاشر

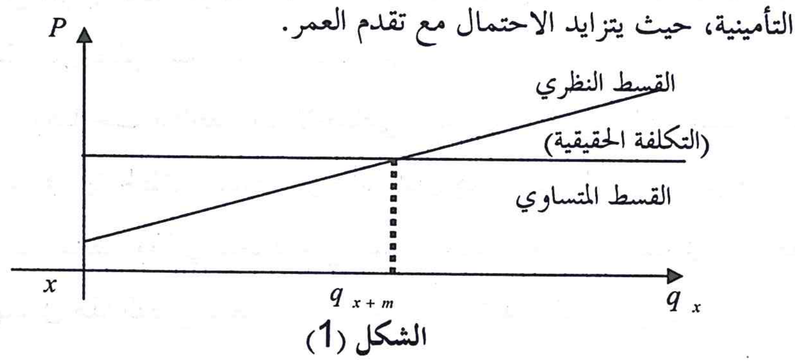
احتياطيات التأمين

يحتل موضوع الاحتياطيات أهمية كبيرة بالنسبة لشركات التأمين،إذ يعتبر من الأمور التي تميز عمل هذه الشركات ، وتعطيها خصوصية قياساً بالشركات الأخرى التجارية والصناعية وغيرها.

سنتناول وقبل الخوض في المسائل الرياضية للاحتياطيات، أهم أشكال الاحتياطيات والمتمثلة بالاحتياطي الرياضي الصافي (أو الاحتياطي الحسابي)، الاحتياطي الإضافي، احتياطي التعويضات تحت التسوية، احتياطي التعويضات تحت التسديد.

10.1 -الاحتياطي الرياضي الصافي:

أو الاحتياطي الحسابي أو كما يطلق عليه المخصص الرياضي الصافي ، وهو يشكل الجزء الأكبر من احتياطيات الأخطار السارية التي يجري حجزها كمبالغ لمواجهة التزامات العقود سارية المفعول. تتميز صناعة التأمين عن غيرها بأن ثمن تكلفة الخدمة التي تقدمها شركات التأمين والمتمثل بالقسط المتساوي يكون أكثر من التكلفة الفعلية للخطر في النصف الأول من التغطية التأمينية (مدة العقد) نظراً لكون احتمال وفاة المستأمن لم يبدأ بالتزايد بعد ، وباعتبار أن الاحتمال هو أحد عناصر حساب التكلفة. (انظر الشكل رقم(1))، في حين أن القسط المتساوي يصبح أقل من التكلفة الحقيقية في النصف الثاني من التغطية التأمينية، حيث يتزايد الاحتمال مع تقدم العمر.



الشكل (1)

إذاً، ومن الشكل(1) يمكننا أن نستنتج بأن مجموع الأقساط المدفوعة في كل سنة وخلال النصف الأول من التغطية (قبل النقطة $x+m$) أكبر من مجموع المطالبات الناتجة عن الوفيات والتي تعكس مجموع التكلفة الحقيقية للوثائق. وبذلك كان لزاماً على شركات التأمين أن تحجز مبالغ معينة تحقق التعادل بين مجموع الأقساط المتساوية المستلمة من جهة ومجموع الأقساط النظرية الممثلة للكلفة الحقيقية للوثائق(المطالبات) من جهة أخرى.

يطلق على تلك المبالغ التي يتم حجزها بالاحتياطي الحسابي، حيث تستخدمه الشركة لضمان الوفاء بالتزاماتها اتجاه حملة الوثائق التي تكلفتها التأمينية تزيد عن الأقساط المسددة في السنوات الأخيرة من التعاقد، انظر الشكل(1).

من هنا، لكل وثيقة تأمين حياة احتياطي حسابي، ومن الوجهة التطبيقية تقوم كل شركة بحجز مبالغ كاحتياطيات حسابية كافية لتغطية جميع الوثائق التي أصدرتها. ونظراً لأن هذه الاحتياطيات ليست ملكاً صافياً لشركة التأمين، كونه ينتظرها الوفاء بالتزامات لم يحن وقتها بعد، وهي ليست ملكاً صافياً للمؤمن لهم كونهم لم يسددوا سوى جزء من تكلفة تغطيتهم تأمينياً، فقد أعطى القانون لشركات التأمين حق استثمار تلك الاحتياطيات وفق شروط ونسب محدده وبمعدلات فائدة استثمارية مناسبة، حيث يجري الأخذ بعين الاعتبار مصلحة المؤمن لهم في تلك الفوائد عند تحديد القسط الصافي، إذ يخصم ذلك القسط بمعدل فائدة معين يطلق عليه معدل الفائدة الفني.

وهنا يجب ملاحظة أن الاحتياطي الحسابي هو الجزء الأكبر من رأسمال الوثيقة في أية لحظة، والفارق بين رأس المال هذا ومبلغ التأمين هو المبلغ الصافي المعرض للخطر والذي تتحدد على أساسه تكلفة التغطية التأمينية في أية لحظة. سنهتم في هذا الفصل بالمعالجة الرياضية التفصيلية لهذا النوع من الاحتياطيات.

10.2-احتياطي التعويضات تحت التسوية:

يتم حجز هذه الاحتياطيات لمواجهة الالتزامات التي حددت للمؤمن لهم بعد تحقق الأخطار المتعلقة بهم، ولكن لسبب ما قد يكون التأكد من تطبيق مبدأ السبب القريب أو غيره جرى إيقاف تسديد تلك الالتزامات، وعند الانتهاء من عملية التسوية تقوم الشركة بالتسديد. لذلك تلتزم الشركة بتشكيل احتياطيات كافية لضمان عملية التسديد.

هذا وقد نص القرار رقم 54 /100للعام 2006 الناظم لأسس حساب الاحتياطيات الفنية في السوق السورية للتأمين ، وفي المادة الثانية منه على ضرورة أن تلتزم كل شركة تأمين بحجز مبالغ تعادل مجموع المطالبات التي لم تتم تسويتها حتى تاريخ إعداد الميزانية أو بالقيمة التي تقدرها الشركة أيهما أكثر. وأضافت المادة الرابعة بأنه لا يجوز للشركة أن تخفض قيمة احتياطي التعويضات تحت التسوية عن طريق إعادة التقدير إلا إذا توفرت لديها وثائق دامغة تتيح ذلك.

10.3 – احتياطي التعويضات تحت التسديد:

التعويضات تحت التسديد هي تعويضات أقرت لمن يستحقها و لم يعد عليها أي نزاع، ولكن حتى تصرف تحتاج إلى بعض الإجراءات ذات الطابع الشكلي كاستكمال بعض الأوراق أو انتظار انتهاء السنة المالية أو ما شابه.

من هنا، على الشركة حجز مبالغ احتياطية لمواجهة هذا النوع من التعويضات في الوقت المناسب.

10.4 – احتياطي إضافي:

بالإضافة إلى الاحتياطيات السابقة يتم حجز مبالغ محددة كاحتياطي لمواجهة الالتزامات الطارئة وغير المتوقعة، كأن تواجه الشركة خسائر كبيرة غير عادية، أو

- أي انحرافات في التكاليف الفعلية عن تلك التي سبق توقعها، أو الخسائر الناتجة عن توقعات متفائلة مبالغ فيها.

10.5-المعالجة الرياضية للاحتياطي الرياضي الصافي:

نظراَ لكون الاحتياطي الرياضي الصافي هـو النـوع الأكثـر أهميـة مـن الاحتياطيات التأمينية وهو الجزء الأكبر منها، وباعتبـار أن الأنـواع الأخـرى للاحتياطيات يمكن بسهولة تحديد مقدارها وحجزها بالاعتماد على نسب تحددها قوانين هيئات الإشراف على التأمين وعلى تجارب وخـبرات الـشركة سـابقاً، سنتناول في الفقرات اللاحقة أساليب تشكيل الاحتياطي الرياضي الـصافي مـن الوجهة الرياضية مع أمثلة موضحة لذلك.

بشكل عام، هناك أسلوبان رئيسيان في النظر إلى تشكيل الاحتياطي الرياضي الصافي، فإما بالاعتماد على الماضي وعندها يطلق عليه بالأسـلوب الماضـي أو الرجعي.أو بالاعتماد على المستقبل وعندها يطلق على ذلك بأسلوب المستقبل أو التطلعي.

10.5.1- الأسلوب الرجعي Retrospective

كما أسلفنا، وفقاً لهذا الأسلوب يتم الرجوع إلى ماضي الوثيقة ومتابعة قيمتـها خلال السنوات السابقة للسنة التي نرغب بإيجاد الاحتياطي الرياضي الصافي لتلك الوثيقة. إن عملية الحساب بالأسلوب الرجعي والتي سنعالجها هنا تشترط وجـود نظام القسط المتساوي في تسديد تكلفة الوثيقة، حيث نحصل علـى الاحتيـاطي الرياضي الصافي انطلاقاً من القاعدة **التالية**:

الاحتياطي الرياضي الصافي في تاريخ معين = جملة الأقساط المحصلة حتى تاريخه مطروحـــاً منـــها
التزامات الشركة المدفوعة قبل هذا التاريخ عند إيجاد جملة الأقساط المحصلة.

يتم الأخذ بعين الاعتبار معدل فائدة استثمارية معين يختلف عن المعدل الفـني للفائدة المستخدم في تصميم جداول الرموز الحسابية ، وكذلك عـن أي معـدل استثمار آخر تتعامل به الشركة. هذه الطريقة تتطلب حسابات مطولـة، لـذلك يفضل استخدامها عند إيجاد قيمة الوثيقة بعد فترة زمنية قصيرة من بدء التعاقد.

مثال:

لدى فحص إحدى وثائق التأمين على الحياة التي يعود تاريخ شرائها إلى أربع سنوات مضت، تبين أنها تضمن خطر الوفاة ولمدى الحيـاة وذات مبلـغ قـدره 300000 ل.س لشخص عمره 35 عاماً. احسب الاحتيـاطي الحـسابي لتلـك الوثيقة، وذلك قبل أن يحين موعد تسديد القسط الخامس من أجل معدل فائـدة 3.5%

الحل:

* نبدأ **بإيجاد الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة الأولى**، وذلك بحساب كل من جملة الأقساط المحصلة والتزامات الشركة المدفوعة قبل أن يحين موعد تـسديد القسط الخامس:

القسط السنوي الصافي لوثيقة تأمين وفاة ولمدى الحياة بمبلغ 300000 ل.س:

$$P = c\frac{M_x}{N_x}$$

$$= 300000\frac{M_{35}}{N_{35}}$$

$$= 300000\frac{7894.6765}{427856.27}$$

$$= 300000(0.018451702)$$
$$= 5535.51 \text{ ل.س}$$

وبالعودة إلى جدول الحياة و الوفاة نلاحظ أن عدد المؤمن عليهم عند السن 35 سنة يعادل 74550 شخصاً، وبالتالي فإن قيمة الأقساط المحصلة في بداية السنة الأولى هي:

$$= L_{35} * P$$
$$= 74550 * 5535.51$$
$$= 412672320.8 \text{ ل.س}$$

باستثمار هذا المبلغ بمعدل فائدة 3.5% نحصل على جملة الأقساط الكلية التالية:

$$= 412672320.8(1+i)$$
$$= 412672320.8(1+0.035)$$
$$= 427115852.1 \text{ ل.س}$$

أما لايجاد جملة المستلزمات (جملة التعويضات) فنعود إلى جدول الحياة و الوفاة فنجد أن عدد المتوفين خلال العمر 35 سنة يساوي إلى $d_{35} = 543$ يستحق ورثتهم مبلغاً إجمالياً يعادل:

$$= 300000 * d_{35}$$
$$= 300000 * 543$$
$$= 162900000 \text{ ل.س}$$

وبالتالي، فإن الاحتياطي الحسابي عند بلوغ المؤمن عليه السن 36 عاماً هو:

$$= 427115852.1 - 162900000$$
$$= 264215852.1 \text{ ل.س}$$

إيجاد الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة الثانية:

$$= L_{36} * P$$
$$= 74007 * 5535.51$$
$$= 409666488.6$$

المتحصلات في بداية السنة الثانية:

$= 264215852.1 + 409666488.6$

$= 673882340.7$

ل.س

إجمالي المتحصلات في نهاية السنة الثانية:

$= 673882340.7(1+i)$

$= 673882340.7(1+0.035)$

$= 697468222.6$ ل.س

جملة التعويضات (الالتزامات) بالنسبة للشركة:

$= 300000 * d_{36}$

$= 300000 * 553$

$= 165900000$ ل.س

الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة الثانية:

$= 697468222.6 - 169200000$

$= 531568222.6$ ل.س

إيجاد الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة الثالثة:

قيمة الأقساط المحصلة في بداية السنة الثالثة:

$= L_{37} * P$

$= 73454 * 5535.51$

$= 406605351.5$ ل.س

المتحصلات في بداية السنة الثالثة:

$= 697468222.6 + 406605351.5$

$= 1104073574$

إجمالي المتحصلات في نهاية السنة الثالثة:

$= 1104073574(1+i)$

$= 1104073574(1+0.035)$

$= 1142716149$ ل.س

جملة التعويضات (الالتزامات) بالنسبة للشركة:

$= 300000 * d_{37}$
$= 300000 * (562)$
$= 168600000$ ل.س

فيكون الاحتياطي الحسابي للوثيقة في نهاية السنة الثالثة:

$= 1142716149 - 168600000$
$= 974116149$ ل.س

إيجاد الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة الرابعة:

قيمة الأقساط المحصلة في بداية السنة الرابعة:

$= L_{38} * P$
$= 72892 * 5535.51$
$= 403494394.9$ ل.س

المتحصلات في بداية السنة الرابعة:

$= 974116149 + 403494394.9$
$= 1377610544$ ل.س

إجمالي المتحصلات في نهاية السنة الرابعة:

$= 1377610544(1 + 0.035)$
$= 1425826913$ ل.س

جملة التعويضات:

$= 300000 * d_{38}$
$= 300000 * (573)$
$= 171900000$ ل.س

الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة الرابعة:

$= 1425826913 - 171900000$
$= 1253926913$ ل.س

إيجاد الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة الخامسة:

قيمة الأقساط المحصلة في بداية السنة الخامسة:

$= L_{39} * P$
$= 72319 * 5535.51$
$= 400322547.7$ ل.س

المتحصلات في بداية السنة الخامسة:

$$= 1425826913 + 400322547.7$$
$$= 1826149461 \text{ ل.س}$$

إجمالي المتحصلات في السنة الخامسة:

$$= 1826149461(1 + 0.035)$$
$$= 1890064692 \text{ ل.س}$$

إجمالي الالتزامات:

$$= 300000 * d_{39}$$
$$= 300000 * (586)$$
$$= 175800000 \text{ ل.س}$$

الاحتياطي الحسابي النهائي:

$$= 1890064692 - 175800000$$
$$= 1714264692 \text{ ل.س}$$

وهو الاحتياطي الحسابي للوثائق كافة لكل المستأمنين عند السن 40 وقبل تسديدهم للقسط السادس.

أما الاحتياطي الحسابي للوثيقة الواحدة فهو نسبة الاحتياطي الحسابي النهائي إلى عدد الأحياء في السنة التالية:

$$= \frac{1714264692}{L_{40}}$$
$$= \frac{1714264692}{71733}$$
$$= 23897.85 \text{ ل.س}$$

يعتبر هذا الرقم احتياطياً حسابياً لأية وثيقة مماثلة من حيث قيمتها و عمر المستأمن و معدل الفائدة.

مثال:

احسب الاحتياطي الحسابي لوثيقة تأمين حياة (وقفية بحتة) قيمتها 150000 ل.س مشتراة من شخص كان على العمر 40 سنة و ذلك منذ ثلاث سنوات (معدل الفائدة 3.5%) مدة الوثيقة 20 سنة.

الحل:

لدينا: $i = 0.035; c = 150000; x = 40; n = 20$

وبالتالي فإنه لإيجاد الاحتياطي الحسابي في نهاية كل سنة من السنوات الثلاث التالية لتوقيع العقد، نوجد جملة الأقساط المحصلة و التزامات الشركة في كل من تلك السنوات.

إيجاد الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة الأولى:

القسط السنوي الصافي لوثيقة تأمين حياة (وقفية بحتة) وبمبلغ 50000 ل.س:

$$P = c\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$= 150000\frac{D_{60}}{N_{40} - N_{60}}$$

$$= 150000\frac{6938.2292}{324847.01 - 80851.703}$$

$$= 150000(0.028435912)$$

$$= 4265.39 \text{ ل.س}$$

قيمة الأقساط المحصلة في بداية السنة الأولى التالية لتوقيع العقد:

$$= L_{40} * P$$

$$= 71733 * 4265.39$$

$$= 305968996.7 \text{ ل.س}$$

باستثمار هذا المبلغ بمعدل فائدة 3.5 % نحصل على جملة الأقساط الكلية التالية:

$$= 305968996.7(1 + 0.035)$$

$$= 316677911.6 \text{ ل.س}$$

لإيجاد جملة التعويضات (الالتزامات)، نعود إلى جدول الحياة والوفاة فنجد أن عدد المتوفين عند السن 40 يساوي إلى 598 شخصاً وبالتالي جملة المستلزمات تكون:

$$= 150000 * d_{40}$$
$$= 150000(598)$$
$$= 89700000 \text{ ل.س}$$

ويكون الاحتياطي الحسابي عند بلوغ المؤمن عليه السن 41 سنة هو:

$$= 316677911.6 - 89700000$$
$$= 226977911.6 \text{ ل.س}$$

الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة الثانية (عند بلوغ المؤمن عليه سن 41 سنة):

قيمة الأقساط المحصلة في بداية السنة الثانية هي:

$$= L_{41} * P$$
$$= 71135(4265.39)$$
$$= 303418517.7 \text{ ل.س}$$

جملة الأقساط الكلية (عن معدل فائدة 3.5 %):

$$= 303418517.7(1 + 0.035)$$
$$= 314038165.8 \text{ ل.س}$$

جملة المستلزمات(عند d_{41}):

$$= 150000 * d_{41}$$
$$= 150000(614)$$
$$= 92100000 \text{ ل.س}$$

وبالتالي يكون الاحتياطي الحسابي عند بلوغ المؤمن عليه سن 42 سنة مساوياً إلى:

$$= 314038165.8 - 92100000$$
$$= 221938165.8 \text{ ل.س}$$

إيجاد الاحتياطي الحسابي في نهاية السنةالثالثة (عند بلوغ المؤمن عليه السن 43 سنة):

قيمة الأقساط المحصلة في بداية السنة الثالثة هي:

$= L_{42} * P$

$= 70521(4265.39)$

$= 300799568.2$ ل.س

جملة الأقساط الكلية (عند معدل فائدة 3.5 %):

$= 300799568.2(1+0.035)$

$= 311327553.1$ ل.س

جملة المستلزمات(عند d_{42}):

$= 150000 * d_{42}$

$= 150000(629)$

$= 94350000$ ل.س

الاحتياطي الحسابي عند بلوغ المؤمن عليه سن ال 43 سنة:

$= 311327553.1 - 94350000$

$= 216977553.1$ ل.س

الاحتياطي الحسابي للوثيقة الواحدة المماثلة:

$$= \frac{216977553.1}{L_{43}}$$

$$= \frac{216977553.1}{69892}$$

$= 3104.47$ ل.س

10.5.2- الأسلوب التطلّعي prospective

على خلاف الأسلوب الرجعي، فإن هذا الأسلوب يعتمد علـى مـستقبل الوثيقة، وبالتالي تطبق القاعدة التالية:

الاحتياطي الحسابي في تاريخ معين = القيمة الحالية في ذلك التـاريخ لالتـزام الشركة مطروحاً منها القيمة الحالية في ذلك التاريخ لما تبقى من أقساط واجبة السداد.

بدلاً من القيمة الحالية لالتزام الشركة، يمكن استخدام القسط الوحيد الصافي في تاريخ اللحظة التي نريد فيها إيجاد الاحتياطي الحسابي. إن استخدام هذا الأسلوب مفضل في السنوات الأخيرة من مدة التأمين، أي بوجود فترة زمنية متبقية من انتهاء العقد ذي عدد قليل من السنوات.

إذاً وفقاً للأسلوب التطلعي ، ولإيجاد الاحتياطي الحسابي في تاريخ ما، نتبع الخطوات التالية:

1 – نوجد القسط الوحيد الصافي في تاريخ إيجاد الاحتياطي الحسابي الذي نعتبره ممثلاً للقيمة الحالية لالتزامات الشركة، وذلك عند سن المؤمن له هو $x + V$، حيث V تمثل ما ينقضي من مده التأمين ابتداء من تاريخ شراء الوثيقة وحتى تاريخ حساب الاحتياطي الحسابي

2- نوجد القسط السنوي الصافي في تاريخ شراء الوثيقة.

3- نوجد القيمة الحالية لما تبقى من الأقساط في تاريخ إيجاد الاحتياطي

4- نطرح ناتج -1- من ناتج -2- ، فنحصل على الاحتياطي الحسابي للوثيقة الواحدة (قيمة الوثيقة).

مثال:

اشترى شخص وثيقة تأمين على الحياة منذ ثلاث سنوات، حيث كان على العمر 33 سنة لضمان خطر الوفاة ولمدى الحياة بمبلغ 180000 ل.س.

احسب الاحتياطي الحسابي لتلك الوثيقة قبل تسديد الشخص للقسط السنوي الرابع ثم الاحتياطي الحسابي لكامل الوثائق لدى الشركة المعينة.

الحل:

لدينا $x = 33$ عمر المستأمن عند شراء الوثيقة، $v = 3$ وبالتالي فإن $x + V = 36$ هو عبارة عن عمر المستأمن عند حساب قيمة الوثيقة (الاحتياطي الحسابي) ، $c = 180000$ مبلغ التأمين.

لذلك ولإيجاد الاحتياطي الحسابي عند العمر 36 سنة، نوجد:

1- القسط الوحيد الصافي والذي هو بمثابة التزام الشركة عند العمر 36 سنة للمستأمن:

$$= c.A_{x+V}$$

$$= 180000\frac{M_{x+V}}{D_{x+V}}$$

$$= 180000\frac{M_{36}}{D_{36}}$$

$$= 180000\frac{7737.2973}{21449.65}$$

$$= 64929.43 \text{ ل.س}$$

2- القسط السنوي الصافي في تاريخ شراء الوثيقة:

$$P = 180000\frac{M_x}{N_x}$$

$$= 180000\frac{M_{33}}{N_{33}}$$

$$= 180000\frac{8219.7059}{475467.01}$$

$$= 3111.78 \text{ ل.س}$$

3- القيمة الحالية لما تبقى من الأقساط في تاريخ إيجاد الاحتياطي:

$$= P.\partial_{x+3}$$

$$= 3111.78\frac{N_{x+V}}{D_{x+V}}$$

$$= 3111.78\frac{N_{36}}{D_{36}}$$

$$= 3111.78\frac{405493}{21449.65}$$

$$= 58826.30 \text{ ل.س}$$

4- الاحتياطي الحسابي للوثيقة (قيمة الوثيقة):

$$= 64929.43 - 58826.30$$
$$= 6103.13 \text{ ل.س}$$

أما الاحتياطي الحسابي العام لدى الشركة فيكون مساوياً للاحتياطي الحسابي للوثيقة مضروباً بعدد الوثائق الكلي لدى الشركة والمتمثل بعدد الأحياء في تاريخ حساب الاحتياطي، أي L_{x+V} :

$$= 6103.13 * L_{36}$$
$$= 6103.13(74007)$$
$$= 451674341.91 \text{ ل.س}$$

مثال:

تعاقد شخص عمره 30 سنة مع إحدى شركات التأمين على وثيقة تـأمين وقفية بحتة- بمبلغ 300000 ل.س وبمدة تأمين قدرها 20 سنة وبقسط سنوي متساوٍ. احسب الاحتياطي الحسابي عن نهاية السنة الثانية عشرة

الحل:

لدينا $v = 12; c = 300000; n = 20; x = 30$

1- القسط الوحيد الصافي والممثل لالتزام الشركة:

$$= c._{n}E_{x+V}$$
$$= 300000\frac{D_{x+n}}{D_{x+V}}$$
$$= 300000\frac{D_{50}}{D_{42}}$$
$$= 300000\frac{11617.341}{16627}$$
$$= 209606.25 \text{ ل.س}$$

2-القسط السنوي الصافي في تاريخ التعاقد:

$$P = c\frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$= 300000 \frac{D_{50}}{N_{30} - N_{50}}$$

$$= 300000 \frac{11617.341}{554669.99 - 174795.69}$$

$$= 300000 \frac{11617.341}{379874.3}$$

$= 9174.62$ ل.س

3- القيمة الحالية لما تبقى من الأقساط في تاريخ إيجاد الاحتياطي:

$$= P.\partial_{x+V\,\overline{n|}} = P.\partial_{42\,\overline{20|}}$$

$$= P \frac{N_{42} - N_{50}}{D_{42}}$$

$$= 9174.62 \frac{289370.06 - 174795.69}{16627.378}$$

$$= 9174.62 \frac{114574.37}{16627.378}$$

$= 63219.61$ ل.س

4-الاحتياطي الحسابي للوثيقة:

$$= 209606.25 - 63219.61$$

$= 146386.64$ ل.س

مثال:

اشترى مهندس وثيقة تأمين مختلط منذ أربع سنوات تضمن لـه مبلـغ 250000 ل.س إذا بقي على قيد الحياة لسن الخمسين من العمر ، أو يؤول المبلغ إلى زوجته (الوريثة) إذا توفي قبل ذلك.

احسب الاحتياطي الحسابي لتلك الوثيقة الآن إذا علمت أن عمر المهندس عنـد شرائه الوثيقة هو 39 سنة.

الحل:

لدينا $n = 50 - 39 = 11; v = 4; c = 250000; x = 39$

1–القسط الوحيد الصافي عن العمر 43 سنة:

$$= 250000 \frac{M_{x+V} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+V}}$$

$$= 250000 \frac{M_{43} - M_{50} + D_{50}}{D_{43}}$$

$$= 250000 \frac{6698.5982 - 5706.3469 + 11617.341}{15921.81}$$

$$= 250000 \frac{12609.59}{15921.81}$$

$$= 250000(0.791969776)$$

$$= 197992.44 \text{ ل.س}$$

2–القسط السنوي الصافي في تاريخ التعاقد:

$$P = c \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

$$= 250000 \frac{M_{39} - M_{50} + D_{50}}{N_{39} - N_{50}}$$

$$= 250000 \frac{7280.5947 - 5706.3469 + 11617.341}{343752.11 - 174795.69}$$

$$= 250000 \frac{13191.69}{168956.42}$$

$$= 19519.22 \text{ ل.س}$$

3– القيمة الحالية للأقساط المتبقية:

$$= P.\partial_{x+v\,\overline{11|}} = P.\partial_{43\,\overline{11|}}$$

$$= P \frac{N_{43} - N_{50}}{D_{43}}$$

$$= 19519.22 \frac{272742.68 - 174795.69}{15921.81}$$

$$= 19519.22(6.151749707)$$

$$= 120077.36 \text{ ل.س}$$

3-الاحتياطي الحسابي للوثيقة:

$$=197992.44-120077.36$$
$$=77915.08 \text{ ل.س}$$

10.6- الاحتياطي الحسابي في حالة السداد بقسط وحيد صافٍ:

في هذه الحالة، يكون الاحتياطي الحسابي مساوياً إلى القيمة الحالية لالتزام الشركة عن بلوغ الشخص المستأمن تمام السن في تاريخ حساب الاحتياطي.

وبعبارة أخرى، إذا كان المطلوب إيجاد الاحتياطي الحسابي للوثيقة في نهاية السنة الثالثة (مثلاً) من مدة التأمين، فإن الجواب يكون قيمة القسط الوحيد الصافي لوثيقة التأمين عند تمام المستأمن السن $x+3$.

مثال:

اشترى شخص عمره 25 سنة وثيقة تأمين مدى الحياة مبلغها 180000 ل.س احسب الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة الثانية عشرة التأمينية، إذا علمت أن الأقساط تسدد بقسط وحيد صافٍ.

الحل:

لدينا : $v=12;c=180000;x=25$

وبالتالي فإن الاحتياطي الحسابي المطلوب إيجاده هو القسط الوحيد الصافي للوثيقة عند تمام المستأمن للسن 37 سنة، أي:

$$=c.A_{x+V}=c.A_{37}$$
$$=180000\frac{M_{37}}{D_{37}}$$
$$=180000\frac{7582.4399}{20569.442}$$
$$=66352.76 \text{ ل.س}$$

10.7- الاحتياطي الحسابي في حالة السداد بعدد محدد(مؤقت) من الأقساط:

هنا نميز بين حالتين:

الأولى- إذا كانت المدة المراد إيجاد الاحتياطي الحسابي فيها تفوق أو تساوي عدد الأقساط المحدد، فهذا يعني أن الأقساط كافة قد تم سدادها، وبالتالي فإن الاحتياطي الحسابي يؤول إلى احتياطي حسابي في حالة السداد بقسط وحيد صافٍ، وقد عالجنا هذه الحالة في الفقرة السابقة.

الثانية- إذا كانت المدة المراد إيجاد الاحتياطي الحسابي فيها أقل من عدد الأقساط المحدد، نتبع الخطوات الأربع نفسها التي استخدمناها في الأسلوب التطلعي، بحيث نراعي عند حساب كل من القسط السنوي الصافي والقيمة الحالية للأقساط المتبقية أن عدد الأقساط محدود وليس لمدى الحياة.

مثال:

أعد المطلوب في المثال السابق بافتراض أن قيمة الوثيقة تسدد ب 15 قسطاً.

الحل:

لدينا $v = 12; k = 15; c = 180000; x = 25$

لإيجاد الاحتياطي الحسابي للوثيقة نتبع الخطوات التالية:

1- القسط الوحيد الصافي والذي هو بمثابة التزام الشركة عند تمام المستأمن للعمر $x+12$:

$$= c.A_{x+V} = c.A_{37}$$

$$= 180000\frac{M_{37}}{D_{37}}$$

$$= 180000\frac{7582.4399}{20569.442}$$

$= 66352.76$ ل.س

2- القسط السنوي الصافي في تاريخ شراء الوثيقة، حيث الوثيقة هي لمدى الحياة وبأقساط محدده العدد(k):

$$P = c.\frac{M_x}{N_x - N_{x+k}}$$

$$= 180000\frac{M_{25}}{N_{25} - N_{40}}$$

$$= 180000\frac{9695.0517}{710318.29 - 324847.01}$$

$$= 180000(0.025151164)$$

$$= 4527.21 \text{ ل.س}$$

3- القيمة الحالية للأقساط المتبقية في تاريخ إيجاد الاحتياطي:

أي عند تمام المستأمن السن 37 سنة، وهنا أيضاً نراعي أن لدينا عدداً محدداً من الأقساط:

$$= P.\partial_{x+V\,\overline{k}|}$$

$$= P\frac{N_{x+V} - N_{x+k}}{D_{x+12}}$$

$$= 4527.21\frac{N_{37} - N_{40}}{D_{37}}$$

$$= 4527.21\frac{384043.35 - 324847.01}{20569.442}$$

$$= 4527.21(2.876340027)$$

$$= 13028.76 \text{ ل.س} \qquad (2)$$

نطرح (2) من (1) فنحصل على الاحتياطي الحسابي للوثيقة:

$$= 66352.76 - 13028.76$$
$$= 53324.00$$ ل.س

10.8- تمارين غير محلولة

1- وقع شخص عمره / 45 / عاماً وثيقة تأمين تقضي أن تدفع شركة التأمين لورثته في حال وفاته مبلغاً قدره / مليون ليرة / مقابل تسديده لأقساط سنوية صافية مـــا دام على قيد الحياة.

احسب الاحتياطي الحسابي لتلك الوثيقة وذلك قبل تسديد القسط الرابع.

2 - احسب الاحتياطي الحسابي في نهاية كل سنة من السنوات الخمس التالية لتوقيع عقد يقضي أن تدفع شركة التأمين لأحمد / 25 / سنة مبلغا قدره / مليون ونـــصف / ليرة و ذلك عند وصوله لسن الستين من العمر مقابل تسديده أقساط سنوية صـــافية طول فترة التأمين

3- اشترى أحد المهندسين البالغ من العمر حاليا / 44 / سنة وثيقة تأمين بمبلـــغ / مليون / ليرة ينستحق الدفع له اذا بقي على قيد الحياة حتى الخامسة والستين من العمر واذا توفي قبل هذا العمر فيؤول المبلغ إلى زوجته . احسب الاحتياطي المحاسبي لهـــذه الوثيقة قبل أن يسدد هذا المهندس القسط الخامس.

4- اشترى أحد اللاعبين الرياضيين البالغ من العمر / 31 / سنة وثيقة تأمين تـــضمن لزوجته الحصول على مبلغ / مليون / ليرة اذا توفي قبل بلوغه الستين من العمر مقابـــل تسديده أقساطاً سنوية صافية ولمدة أقصاها / 10 / ســـنوات . أوجـــد الاحتيـــاطي المحاسبي لهذه الوثيقة

ا-قبل تسديده للقسط السادس

ب-بعد تسديده للقسط الأخير

5- في عام 2002 اشترى وائل وثيقة تأمين على الحياة عندما كـــان عمـــره /25 / سنة تضمن خطر الوفاة و لمدى الحياة وبمبلغ/ 200000 / $. أوجـــد الاحتيـــاطي الحسابي لهذه الوثيقة قبل تسديد وائل القسط السنوي الخامس ثم احسب الاحتيـــاطي الحسابي لكامل الوثيقة.

6- أوجد الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة العاشرة لوثيقة تأمين وقفية بحتة و بمبلغ / نصف مليون / دولار لشخص عمره عند التعاقد / 40 / سنة يستحق له المبلغ بعد عشرين عاما من التوقيع.

7- أرادت شركة التأمين أن توجد الاحتياطي الحسابي لوثيقة تأمين مختلط تم شراؤها منذ / 6 / سنوات عندما كان عمر المستأمن / 30 / سنة اذا علمت أن المبلغ المؤمن هو/700000 / $ وأن مدة التأمين القصوى / 30 / سنة (اما أن يستلم المستأمن المبلغ بعد / 30 / سنة أو أن يستلم ولده المبلغ في حال وفاته قبل هذه المدة).

8- دفع خليل / 38 / سنة قسطاً وحيداً صافياً ليؤمن على مبلغ قدره /نصف مليون / ليرة يؤول لزوجته في حال وفاته . أوجد الاحتياطي الحسابي في نهاية السنة الثامنة التأمينية .

الفصل الحادي عشر

الإلغاء والتصفية والاستبدال

تعديل مدة السداد

الاقتراض

الفصل الحادي عشر

الإلغاء والتصفية والاستبدال

تعديل مدة السداد

الاقتراض

إلى جانب الاحتياطي الحسابي وكيفية إيجاده، هناك موضوعات أخرى تعتبر على جانب كبير من الأهمية وهي امتداد لفكرة الاحتياطات أو المخصصات في صناعة التأمين، إذ أن معالجة تلك الموضوعات من الناحية الفنية تستند بشكل دائم على قاعدة التعادل بين الأقساط المطلوب تسديدها من قبل المؤمن له من جهة ، وبين التزامات شركة التأمين من جهة أخرى، وبالتالي فإن الخطوة الأولى في تلك المعالجة هي إيجاد الاحتياطي الحسابي للوثيقة الذي يعتبر بمثابة قسط وحيد لأية وثيقة جديدة، حيث يضاف إليه القيمة الحالية لأية أقساط أخرى يتم الاتفاق على الاستمرار في سدادها.

وهنا نشير إلى أن التغير الذي يطرأ على عقد التأمين يتناول إما مبلغ التأمين أو مدة سداد الأقساط أو نوع التأمين، ومعظم حالات التغيير تطال العقود التي تسدد بأقساط سنوية وليس بقسط وحيد.

على رأس هذه الموضوعات يأتي إلغاء الوثائق وتصفيتها واستبدالها وتعديل مدة سداد الأقساط والاقتراض.

11.1- الإلغاء والتصفية والاستبدال:

إن توقيع عقد التأمين وإتمام عملية شراء الوثيقة لا يعني بالضرورة أن التزام المؤمن له سيجري بشكل طبيعي حتى يحين موعد الحصول على مبلغ التأمين، إذ قد تواجه الشركة مؤمنين لهم يمتنعون عن دفع الأقساط في الوقت المناسب ، وبالشروط

الواردة في الوثيقة إما بطلب منهم وبشكل صريح أو بدون أي إعلام للشركة عن رغبتهم بذلك.

قد يكون السبب الذي يدفع مثل هؤلاء المؤمن لهم لهذا السلوك هو العجز عن تسديد ما يترتب من أقساط، وقد يكون النسيان أو التعمّد وتقصّد إنهاء عقد التأمين. وهنا تكون النتائج المترتبة على ذلك هو رد فعل الشركة المتمثل بإحدى الإجراءات التالية:

11.1.1- الإلغاء:

وهو إجراء تلجأ إليه شركة التأمين في حال امتنع المؤمن له عن الاستمرار في تسديد الأقساط المترتبة عليه وفقاً لما نصّ عليه العقد ورغم الإنذارات اللازمة التي تكون قد وجّهتها له ، بالإضافة إلى شرط أن يكون عدد الأقساط الكاملة التي سدّدها لا يصل إلى ثلاثة أقساط.

والمقصود بالإلغاء هنا، إلغاء التزام شركة التأمين اتجاه المؤمن له ، وبالتالي يسقط حق الطرف الثاني في أي شكل من أشكال المطالبة كالتصفية أو التأمين المخفّض أو استرداد الأقساط أو غير ذلك، وتبقى الأقساط المدفوعة حقاً مكتسباً لشركة التأمين.

11.1.2 التصفية:

ويقصد بها تنازل المؤمن له عن حقوقه المنصوص عنها في العقد لقاء أن يحصل على مبلغ معين من شركة التأمين.

يفترض أن المبلغ الذي تلتزم به الشركة كقيمة تصفية للوثيقة يكون مساوياً للاحتياطي الحسابي للوثيقة في تاريخ التصفية، إلا أن معظم الشركات تلتزم بمبلغ أقل من ذلك، والسبب يعود إلى ما تؤدي اليه عملية التصفية من رفع للمتوسط العام لخطر الوفاة للوثائق سارية المفعول. إذ أن معظم من يلجأ إلى التصفية من حملة وثائق التأمين

من خطر الوفاة هم المستأمنون الأصحاء ، وبالتالي الذين يستمرون بدون اللجـوء إلى عمليات التصفية هم من الأشخاص الذين مستواهم الصحي مشكوك فيه.

لقد نصّت المادة 728 من القانون المدني السوري على ما يلي:

" 1- يجوز أيضاً للمؤمن له، متى كان قد دفع ثلاثة أقساط سنوية علـى الأقل، أن يصفي التأمين بشرط أن يكون الحادث المؤمن منه محقق الوقوع.

2- ولا يكون قابلاً للتصفية، التأمين على الحياة إذا كان مؤقتاً."

إذاً، كما يتضح من النص القانوني السابق، أن شرط حصول المؤمن له علـى مبلغ التصفية هو أن يكون قد سدّد ثلاثة أقساط سنوية كاملة على الأقل. هـذا أولاً. وثانياً أن يكون نوع التأمين هو التأمين غير المؤقت، حيث تأتي الفقرة (2) لتكرر مـا ورد في الفقرة (1)، فالتأمين المؤقت لا يتضمن حادثاً محقق الوقوع، وبالتالي لا تصفّى بوالص الوقفية البحتة والتأمين في حالة الحياة.

أمّا عن كيفية حساب مبلغ التصفية وغير ذلك فلم يتضمن القانون سـوى ما جاء في المادة 729:

" تعتبر شروط التخفيض والتصفية جزءاً من الشروط العامة للتأمين ويجب أن تذكر في وثيقة التأمين".

في الواقع العملي تتخذ كل شركة أسلوباً معيناً في حسابها لمبلف التصفية، إلّـا أنه بشكل عام تلجأ الشركات إلى تحديد المبلغ كنسبة ثابتة من الاحتياطي الرياضـي للوثيقة، أو إلى خصم مبلغ معين من ذلك الاحتياطي، وبالتالي يعتـبر لافـرق بـين الاحتياطي ومبلغ التصفية من الفوائض المهمة بالنسبة لعائدات شركة التأمين بالإضافة إلى فائض الاستثمار (الناتج عن الفرق بين معدل الاستثمار العام من جهة وبين معدل الفائدة الفني من جهة أخرى) والفائض المرتبط بالمبالغة بنسبة التحميل على الأقساط، وكذلك الفائض المتعلق بالفرق بين البيانات التي على أساسها حـسبت احتمـالات

الوفاة في جداول الحياة والوفاة من جهة ، وبين التحسّن الذي يطرأ على واقع الوفيات الفعلي من جهة أخرى.

بشكل عام، تعتبر التصفية من المشكلات الجديّة بالنسبة لشركة التأمين التي تسعى إلى الحد منها وتخفيض تواترها إلى أدنى حد ممكن. إن طريقة حساب قيمة التصفية يجب أن تحقق الحد الأقصى من العدالة بين الشركة والمؤمن له طالبي التصفية وبقية المؤمن لهم، فإذا كانت قيم التصفية أقل من المفروض ففيها ظلم إضافي لطالبي التصفية الذين ظلمتهم الظروف ودفعتهم للتصفية أصلاً. أما إذا كانت تلك القيم أكبر من المفروض، ففي ذلك جور على الشركة وهذا ينتقل إلى الإضرار بمصالح بقية المؤمن لهم وكل من له مصلحة في استمرار الشركة وقدرتها على المنافسة وتقديم خدمات أفضل.

مثال:

اشترى مدير أحد مكاتب الدراسات الهندسية عندما كان على العمر 45 سنة، وثيقة تأمين مختلط تضمن له الحصول على مبلغ 500000 ل.س إذا بقي على قيد الحياة عند سن الستين من العمر، أو يدفع هذا المبلغ لابنه الوريث الوحيد إذا توفّي قبل الستين من العمر.

الآن، حيث أصبح على العمر 51 سنة تقدم بطلب تصفية للوثيقة. احسب قيمة الوثيقة بعد التصفية إذا علمت أن الشركة تخصم 18% مقابل التصفية، وطريقة التسديد هي أقساط سنوية.

الحل:

لدينا $x = 45 \quad c = 500000 \quad n = 15 \quad v = 6$

نوجد أولاً الاحتياطي الحسابي للوثيقة بتاريخ طلب التصفية (عند العمر 51)، لذلك :

1-القسط الوحيد الصافي لوثيقة تأمين مختلط عادي بتاريخ طلب التصفية :

$$= c\frac{M_{X+v} - M_{X+n} + D_{X+n}}{D_{X+v}}$$

$$= c\frac{M_{51} - M_{60} + D_{60}}{D_{51}}$$

$$= 500000\frac{5563.1042 - 4204.0847 + 6938.2292}{11081.241}$$

$$= 500000(0.748765296)$$

$$= 374382.6481 \quad \text{ل.س} \qquad (1)$$

2- القسط السنوي الصافي بتاريخ شراء الوثيقة (عند العمر 45 = x):

$$P = c\frac{M_{X} - M_{X+n} + D_{X+n}}{N_{X} - N_{X+n}}$$

$$= 500000\frac{M_{45} - M_{60} + D_{60}}{N_{45} - N_{60}}$$

$$= 500000\frac{6414.3483 - 4204.0847 + 6938.2292}{241579.89 - 80851.703}$$

$$= 500000(0.056919031)$$

$$= 28459.516$$

ل.س

3- القيمة الحالية للأقساط المتبقية (في تاريخ طلب التصفية، أي عند العمر 51 سنة):

$$P \cdot \partial_{X+v\,\overline{n|}} = P\frac{N_{X+v} - N_{X+n}}{D_{X+v}}$$

$$= P\frac{N_{51} - N_{60}}{D_{51}}$$

$$= 28459.516 \frac{163178.34 - 80851.703}{11081.241}$$

$$= 28459.516(7.429369779)$$

$$= 211436.2678 \qquad (2)$$

ل.س

4- الاحتياطي الحسابي للوثيقة والممثل لقيمتها قبل التصفية:

$$= (1) - (2)$$

$$= 374382.6481 - 211436.2678$$

$$= 162946.3803$$

ل.س

5- ما تستحقه الشركة لقاء عملية التصفية:

$$= 162946.3803 \times 0.18$$

$$= 29330.34845$$

6- قيمة الوثيقة بعد التصفية:

$$\chi = 162946.3803 - 29330.34845$$

$$\chi = 133616.0318$$

ل.س

11.1.3- الاستبدال :

بدلاً من أن يطلب المستأمن تصفية الوثيقة واسترداد قيمة التصفية،يمكنه استبدال الوثيقة بوثيقة أخرى جديدة بمجرد أن يعلن تنازله عن الوثيقة سارية المفعول، وهنا يكون أمامه عدة خيارات. فإما الحصول على وثيقة جديدة من النوع نفسه و بمبلغ تأمين مخفّض وبدون أية التزامات، أو الحصول على وثيقة جديدة من نوع آخر وبدون أية التزامات.

وقد نصّت المادة (726) من القانون المدني السوري على:

"1- في العقود المبرمة مدى الحياة دون اشتراط بقاء المؤمن على حياته حياً مدّة معينة، وفي جميع العقود المشترط فيها دفع مبلغ التأمين بعد عدد معين من السنين، يجوز للمؤمن له متى كان قد دفع ثلاثة أقساط على الأقل أن يستبدل بالوثيقة الأصلية وثيقة مدفوعة في مقابل تخفيض في قيمة مبلغ التأمين ولو أنفق على غير ذلك.كل هذا بشرط أن يكون الحادث المؤمن منه محقق الوقوع.

2- ولا يكون قابلاً للتخفيض التأمين على الحياة إذا كان مؤقتاً."

أي أنه لاستبدال وثيقة التأمين يشترط أن يكون طالب الاستبدال قد سدد ثلاثة أقساط على الأقل وأن تكون وثيقة التأمين غير مؤقتة، إلا أنه في الواقع هناك خروج عن هذين الشرطين في الكثير من شركات التأمين، سواء فيما يتعلق بتحقق عدد الأقساط المسددة أم بنوع التأمين الذي تدخل في إطاره الوثيقة.

أ- الحصول على وثيقة جديدة من النوع نفسه وبمبلغ تأمين مخفّض وبدون أية التزامات، أي أن مبلغ التأمين للوثيقة الجديدة هو أقل من ذلك الخاص بالوثيقة سارية المفعول، حيث يرتبط تحديده بقيمة الاحتياطي الحسابي لتلك سارية المفعول بتاريخ إجراء التخفيض.

والمقصود بدون أية التزامات، أن الاحتياطي الحسابي للوثيقة المتنازل عنها يؤخذ على أنه القسط الوحيد الصافي للوثيقة الجديدة، وبالتالي يعتبر المستأمن وكأنه سدد كامل الأقساط المترتبة عليه.

لايجاد مبلغ التأمين c' للوثيقة الجديدة ننطلق من القاعدة التالية:

الاحتياطي الحسابي للوثيقة المتنازل عنها = القسط الوحيد الصافي للوثيقة الجديدة

= القسط الوحيد الصافي لمبلغ قدره

وحدة نقدية واحدة من الوثيقة الجديدة مضروبًا بـ c'.

وبالتالي:

$$c' = \frac{\text{الاحتياطي الحسابي للوثيقة المتنازل عنها}}{\text{القسط الوحيد الصافي لمبلغ وحدة نقدية واحدة من الوثيقة الجديدة}}$$

مثال:

لو عدنا إلى المثال السابق المتعلق بمدير إحدى مكاتب الدراسات الهندسية وافترضنا أن المستأمن وعند وصوله إلى العمر **51** سنة رغب في التوقف عن تسديد الأقساط والتحول إلى وثيقة تأمين مختلط بمبلغ تأمين جديد.

احسب مبلغ التأمين المخفّض للوثيقة الجديدة.

الحـــــل:

بافتراض أن المبلغ المطلوب إيجاده هو c' فيكون:

$$c' = \frac{\text{الاحتياطي الحسابي للوثيقة المتنازل عنها}}{\text{القسط الوحيد الصافي لمبلغ وحدة نقدية واحدة من الوثيقة الجديدة}}$$

$$= \frac{162946.3803}{\frac{M_{X+v} - M_{X+n} + D_{X+n}}{D_{X+v}}}$$

$$= \frac{162946.3803}{\frac{M_{51} - M_{60} + D_{60}}{D_{51}}}$$

$$= \frac{162946.3803 D_{51}}{M_{51} - M_{60} + D_{60}}$$

$$= \frac{162946.3803(11081.241)}{5563.1042 - 4204.0847 + 6938.2292}$$

$$= 217620.10$$

ل.س

وهو المبلغ الذي يشكّل التزاماً على شركة التأمين تقديمه للمستأمن شخصياً إذا بقي على قيد الحياة عند السن 60 أو إلى وريثه إذا توفّي قبل هذا السن، وبدون أن تسدد أية أقساط متبقية.

ب- الحصول على وثيقة جديدة من نوع آخر وبدون أية التزامات

أي التحويل إلى نوع آخر من الوثائق، كأن يكون شخص يملك وثيقة تأمين مختلط ويرغب في استبدالها بوثيقة تأمين خطر وفاة أو غير ذلك، ودون أن يدفع أية أقساط متبقية.

في هذه الحالة، يكون أيضاً مبلغ التأمين للوثيقة الجديدة أقل من مبلغ التأمين للوثيقة المراد التنازل عنها، ويحسب من الصيغة:

$$c' = \frac{\text{الاحتياطي الحسابي للوثيقة المتنازل عنها}}{\text{القسط الوحيد الصافي لمبلغ وحدة نقدية واحدة للوثيقة من النوع الجديد}}$$

فإذا كانت الوثيقة الجديدة هي وثيقة خطر وفاة ولمدى الحياة فهذا يؤدي إلى أن:

$$c' = \frac{\text{الاحتياطي الحسابي للوثيقة المتنازل عنها}}{\dfrac{M_{X+v}}{D_{X+v}}}$$

وإذا كانت وثيقة خطر وفاة مؤقت بـــ n سنة:

$$c' = \frac{\text{الاحتياطي الحسابي للوثيقة المتنازل عنها}}{\dfrac{M_{X+v} - M_{X+n}}{D_{X+v}}}$$

وهكذا .....

مثال:

بالعودة إلى المثال السابق المتعلق بمدير إحدى مكاتب الدراسات الهندسية وبافتراض أن المستأمن رغب في التوقف عن تسديد الأقساط والتحول إلى وثيقة تأمين خطر وفاة لمدى الحياة بمبلغ تأمين جديد. احسب مبلغ التأمين المخفّض للوثيقة الجديدة.

الحل:

بافتراض أن المبلغ المطلوب إيجاده هو c' فيكون:

$$c' = \frac{\text{الاحتياطي الحسابي للوثيقة المتنازل عنها}}{\text{القسط الوحيد الصافي لمبلغ وحدة نقدية واحدة من الوثيقة الجديدة}}$$

$$=\frac{162946.3803}{\frac{M_{X+v}}{D_{X+v}}}$$

$$=\frac{162946.3803}{\frac{M_{51}}{D_{51}}}$$

$$=\frac{162946.3803}{\frac{5563.1042}{11081.241}}$$

$$=\frac{162946.3803(11081.241)}{5563.1042}$$

$$=324575.64$$

ل.س

وهو قيمة الالتزام الجديد المطلوب من شركة التأمين تقديمه للمستأمن في حالة وفاته في أية لحظة بعد سن 51 سنة.

جـ- الحصول على وثيقة تأمين جديدة من نوع آخر مع الاستمرار بتسديد ما يترتب من أقساط

بعد مضي سنوات معينة من مدة التأمين وبسبب تحسّن في ظروف المستأمن المادية أو لوجود دافع ما لديه قد يجعله يطلب التحول إلى وثيقة من نوع آخر مع استمراره في تسديد الأقساط المترتبة عليه حتى نهاية مدة التأمين.

في هذه الحالة يطلق على مبلغ تأمين الوثيقة الجديدة بالمبلغ الاحتياطي، ويمكن أن نرمز له بالرمز c' مقابل c التي ترمز إلى مبلغ تأمين الوثيقة الأولى (المتنازل عنها).

يحسب المبلغ الاحتياطي انطلاقاً من المعادلة التالية:

القسط السنوي الصافي المطلوب تسديده وفق الوثيقة الثانية = القسط السنوي الصافي المسدّد وفق الوثيقة الأولى (المتنازل عنها). وهذا يساوي إلى

القسط السنوي الصافي المطلوب تسديده لمبلغ وحدة نقدية واحدة وفق الوثيقة الـــثــانية مضروباً بـــ c'

وبالتالي:

$$c' = \frac{\text{القسط السنوي الصافي المسدد وفق الوثيقة الأولى(المتنازل عنها)}}{\text{القسط الوحيد الصافي المطلوب تسديده لمبلغ وحدة نقدية واحدة وفق الوثيقة الثانية}}$$

مثال:

من خلال المثال السابق المتعلق بمدير إحدى المكاتب الهندسية، بـــافتراض أن المستأمن وعندما أصبح على العمر 51 أراد التحول من وثيقة تأمين خطر وفاة ولمدى الحياة مع الاستمرار بتسديد الأقساط حتى نهاية مدة التأمين وهي وصوله الى السن 60 سنة. احسب مبلغ التأمين وفق الوثيقة الثانية ثم مبلغ التأمين الكلي.

الحل:

لدينا

$$c = 500000 \qquad n = 15 \qquad v = 6$$

نحسب أولا المبلغ الاحتياطي الذي يمثل مبلغ التأمين الخاص بالوثيقة الثانية c' :

$$c' = \frac{\text{القسط السنوي الصافي المسدد وفق وثيقة التأمين المختلط}}{\text{القسط الوحيد الصافي المطلوب تسديده لمبلغ وحدة نقدية واحدة وفق وثيقة تأمين خطر الوفاة لمدى الحياة}}$$

$$
= \frac{500000 \dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{Nx - N_{x+n}}}{\dfrac{M_{x+v}}{D_{x+v}}}
$$

$$
= \frac{500000 \dfrac{M_{45} - M_{60} + D_{60}}{N_{45} - N_{60}}}{\dfrac{M_{51}}{D_{51}}}
$$

$$
= \frac{500000 \dfrac{6414.3483 - 4204.0847 + 6938.2292}{241579.89 - 80851.703}}{\dfrac{5563.1042}{11081.241}}
$$

$$
= \frac{28459.51594}{0.502028987}
$$

$$
= 56688.98944
$$

ل.س

ويكون مبلغ التأمين الكلي مساوياً إلى:

$$
= c + c'
$$

$$
= 500000 + 56688.98944
$$

$$
= 556688.99
$$

ل.س

حيث يكون المطلوب من المستأمن تسديد تسعة أقساط بالإضافة إلى ستة الأقساط السابقة التي سددها من سن الخامسة والأربعين وحتى سن الواحد والخمسين.

11.2- تعديل مدّة السداد:

يحدث وأن يأتي وقت يطلب فيه المستأمن التحول مثلاً من سداد عدد محدد من الأقساط إلى سداد أقساط لمدى الحياة أو لمدة معينة ما أخرى ومع المحافظة على مبلغ التأمين الخاص بالوثيقة، ذلك بهدف تخفيض قيمة القسط المترتب على المستأمن مثلاً.

إن المعالجة الرياضية لمسألة تعديل مدة السداد هنا تنحصر في إيجاد قيمة القسط الجديد (المعدّل وفقاً لمدة السداد المعدّلة).

من أجل ذلك، نتبع الخطوات التالية:

1- نوجد الاحتياطي الحسابي عند العمر $x+v$ للوثيقة المتنازل عنها (الوثيقة الأولى).

2- نوجد القسط الوحيد الصافي للوثيقة الجديدة عند العمر $x+v$.

3- نوجد الفرق بين ناتج (1) وناتج (2) ويكون مساوياً للقيمة الحالية للأقساط المترتبة على المستأمن، ومنها نستخرج قيمة القسط الجديد.

مثال:

بالعودة إلى المثال السابق المتعلق بمدير إحدى المكاتب الهندسية وبافتراض أنه مع رغبته بالتحول إلى وثيقة تأمين خطر وفاة ولمدى الحياة والاستمرار بدفع الأقساط لنهاية مدة التأمين، أراد الحصول على مبلغ التأمين نفسه والبالغ 500000 ل.س.

الحل:

لدينا $x=45 \quad v=6 \quad n=15 \quad c=500000$

إذاً لدينا في هذه الحالة تغيير نوع الوثيقة وهذا يترتب عليه إيجاد الاحتياطي الحسابي عند العمر $x+v=51$.

وبما أن المستأمن يريد المحافظة على مبلغ التأمين، إذاً سيطرأ تعديل على قيمة القسط المطلوب، نظراً لكون هناك استمرار بدفع الأقساط حتى نهاية مدة التأمين.

لذلك:

1- الاحتياطي الحسابي للوثيقة المتنازل عنها (تأمين مختلط) وعند العمر $x+v=51$:

سبق إيجاده وتبين لنا أنه يساوي 162946.3803 ل.س.

2-القسط الوحيد الصافي للوثيقة الجديدة (تأمين خطر وفاة ولمدى الحياة) وعند العمر $x+v=51$:

$$= c\frac{M_{X+v}}{D_{X+v}}$$

$$= 500000\frac{M_{51}}{D_{51}}$$

$$= 500000\frac{5563.1042}{11081.241}$$

$$= 500000(0.502028987)$$

$$= 251014.4938$$

ل.س

3-القيمة الحالية للأقساط المترتبة على المستأمن بعد سن الـ 51 سنة،تعادل الفرق بين القسط الوحيد الصافي للوثيقة الجديدة وبين الاحتياطي الحسابي:

$$= 251014.4938 - 162946.3803$$

$$= 88068.11347$$

ل.س

وهي القيمة الحالية لأقساط وثيقة تأمين خطر وفاة ولمدى الحياة، قيمة كل قسط هو P وذلك عند سن للمستأمن 51 سنة وسيستمر بدفعها حتى بلوغه الستين من العمر، وبالتالي:

$$88068.11347 = P \cdot \partial_{X+v}$$

$$88068.11347 = P\frac{N_{X+v}}{D_{X+v}}$$

$$88068.11347 = P\frac{N_{51}}{D_{51}}$$

$$= P\frac{163178.34}{11081.241}$$

$$= P(14.72563768)$$

ومنه:

$$P = \frac{88068.11347}{14.72563768}$$
$$= 5980.60$$

ل.س

حيث نلاحظ أن القسط السنوي الصافي قد انخفض من 28459.516 ل.س وهو المقابل لما كان سيحصل عليه من الوثيقة القديمة، إلى 5980.60 ل.س ، وهو المقابل لما سيحصل عليه من الوثيقة الجديدة (تأمين خطر وفاة ولمدى الحياة).

11.3- الاقتراض:

تضمن شركات التأمين من خلال معظم الوثائق التي تصدرها والتي تغطي التأمين على الحياة بوجود عنصر الادخار، حق الاقتراض من الشركة بضمان وثيقة التأمين نفسها، حيث تعد قيمة التصفية الخاصة بالوثيقة ضماناً وحيداً للقرض وفوائده، وبالتالي تتميز عملية الاقتراض هذه بأن المؤمن له ليس لزاماً عليه تسديد القرض.

إن الحد الأقصى لقيمة القرض مع الفوائد هو قيمة التصفية، هذا من ناحية نظرية. لكن من ناحية عملية لا تعطي الشركات قروضاً إلّا في حدود قيمة قسط سنوي واحد أو قسطين سنويين فقط .

هذا وقد نصت وثائق التغطيات الأساسية للتأمين المختلط التي تصدرها المؤسسة العامة السورية للتأمين على إمكانية الحصول على قرض أقساط كاملة، وذلك في كل من الوثائق التالية:

-التأمين المختلط العادي مع الاشتراك بالأرباح.

-التأمين المختلط مع الاشتراك بالأرباح مع مضاعفة مبلغ التأمين في حال الحياة.

-التأمين المختلط مع الاشتراك بالأرباح مع مضاعفة مبلغ التأمين في حال البقاء على قيد الحياة.

-التأمين المختلط المتزايد القيمة مع الاشتراك بالأرباح.

بالإضافة إلى ما سبق، معظم شركات التأمين تقدم قروضاً لمن هو من المؤمن لهم بحاجة لإجراء عملية جراحية للمحافظة على حياته، وذلك في حدود قيمة التصفية وبدون فوائد. إن الغرض من ذلك هو التقليل من معدل الوفيات ، وبالتالي هذا يعود بالوفر على الشركة، ويساهم في تخفيض عملية تصفية الوثائق.

الملحق رقم (1)

الجـــــداول الماليـــــــــة

(على أساس معامل الفائدة المركبة)

معدل الفائدة i=0.01			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^{n}	n
1	1	1.01	1
0.497512438	2.01	1.0201	2
0.330022111	3.0301	1.030301	3
0.246281094	4.060401	1.04060401	4
0.1960398	5.10100501	1.05101005	5
0.162548367	6.15201506	1.061520151	6
0.138628283	7.213535211	1.072135352	7
0.120690292	8.285670563	1.082856706	8
0.106740363	9.368527268	1.093685273	9
0.095582077	10.46221254	1.104622125	10
0.086454076	11.56683467	1.115668347	11
0.078848789	12.68250301	1.12682503	12
0.07241482	13.80932804	1.13809328	13
0.066901172	14.94742132	1.149474213	14
0.06212378	16.09689554	1.160968955	15
0.057944597	17.25786449	1.172578645	16
0.054258055	18.43044314	1.184304431	17
0.050982048	19.61474757	1.196147476	18
0.048051754	20.81089504	1.20810895	19
0.045415315	22.01900399	1.22019004	20
0.043030752	23.23919403	1.23239194	21

معدل الفائدة i=0.01			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^n	n
0.040863718	24.47158598	1.24471586	22
0.03888584	25.71630183	1.257163018	23
0.037073472	26.97346485	1.269734649	24
0.035406753	28.2431995	1.282431995	25
0.033868878	29.5256315	1.295256315	26
0.032445529	30.82088781	1.308208878	27
0.031124436	32.12909669	1.321290967	28
0.02989502	33.45038766	1.334503877	29
0.028748113	34.78489153	1.347848915	30
0.027675731	36.13274045	1.361327404	31
0.026670886	37.49406785	1.374940679	32
0.025727438	38.86900853	1.388690085	33
0.024839969	40.25769862	1.402576986	34
0.024003682	41.6602756	1.416602756	35
0.02321431	43.07687836	1.430768784	36
0.022468049	44.50764714	1.445076471	37
0.021761496	45.95272361	1.459527236	38
0.021091595	47.41225085	1.474122509	39
0.020455598	48.88637336	1.488863734	40
0.019851023	50.37523709	1.503752371	41
0.019275626	51.87898946	1.518789895	42

معدل الفائدة i=0.01			
$1/S_{\overline{n}\vert i}$	$S_{\overline{n}\vert i}$	u^n	n
0.018727371	53.39777936	1.533977794	43
0.018204406	54.93175715	1.549317572	44
0.017705046	56.48107472	1.564810747	45
0.01722775	58.04588547	1.580458855	46
0.01677111	59.62634432	1.596263443	47
0.016333835	61.22260777	1.612226078	48

معدل الفائدة i=0.02			
$1/S_{\overline{n}\vert i}$	$S_{\overline{n}\vert i}$	u^n	n
1	1	1.02	1
0.495049505	2.02	1.0404	2
0.326754673	3.0604	1.061208	3
0.242623753	4.121608	1.08243216	4
0.192158394	5.20404016	1.104080803	5
0.158525812	6.308120963	1.126162419	6
0.134511956	7.434283382	1.148685668	7
0.116509799	8.58296905	1.171659381	8
0.102515437	9.754628431	1.195092569	9
0.091326528	10.949721	1.21899442	10

معدل الفائدة i=0.02			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^n	n
0.082177943	12.16871542	1.243374308	11
0.074559597	13.41208973	1.268241795	12
0.068118353	14.68033152	1.29360663	13
0.06260197	15.97393815	1.319478763	14
0.057825472	17.29341692	1.345868338	15
0.053650126	18.63928525	1.372785705	16
0.049969841	20.01207096	1.400241419	17
0.046702102	21.41231238	1.428246248	18
0.043781766	22.84055863	1.456811173	19
0.041156718	24.2973698	1.485947396	20
0.038784769	25.78331719	1.515666344	21
0.036631401	27.29898354	1.545979671	22
0.034668098	28.84496321	1.576899264	23
0.032871097	30.42186247	1.608437249	24
0.031220438	32.03029972	1.640605994	25
0.029699231	33.67090572	1.673418114	26
0.028293086	35.34432383	1.706886477	27
0.026989672	37.05121031	1.741024206	28
0.025778355	38.79223451	1.77584469	29
0.024649922	40.56807921	1.811361584	30

معدل الفائدة i=0.02			
$1/S_{\overline{n}\rvert i}$	$S_{\overline{n}\rvert i}$	u^n	n
0.023596347	42.37944079	1.847588816	31
0.022610607	44.22702961	1.884540592	32
0.021686531	46.1115702	1.922231404	33
0.020818673	48.0338016	1.960676032	34
0.020002209	49.99447763	1.999889553	35
0.019232853	51.99436719	2.039887344	36
0.018506779	54.03425453	2.080685091	37
0.017820566	56.11493962	2.122298792	38
0.017171144	58.23723841	2.164744768	39
0.016555748	60.40198318	2.208039664	40
0.015971884	62.61002284	2.252200457	41
0.015417295	64.8622233	2.297244466	42
0.014889933	67.15946777	2.343189355	43
0.014387939	69.50265712	2.390053142	44
0.013909616	71.89271027	2.437854205	45
0.013453416	74.33056447	2.486611289	46
0.013017922	76.81717576	2.536343515	47
0.012601836	79.35351927	2.587070385	48

معدل الفائدة i=0.03			
$1/S_{\overline{n}\mid i}$	$S_{\overline{n}\mid i}$	u^n	n
1	1	1.03	1
0.492610837	2.03	1.0609	2
0.323530363	3.0909	1.092727	3
0.239027045	4.183627	1.12550881	4
0.188354571	5.30913581	1.159274074	5
0.1545975	6.468409884	1.194052297	6
0.130506354	7.662462181	1.229873865	7
0.112456389	8.892336046	1.266770081	8
0.098433857	10.15910613	1.304773184	9
0.087230507	11.46387931	1.343916379	10
0.078077448	12.80779569	1.384233871	11
0.070462085	14.19202956	1.425760887	12
0.064029544	15.61779045	1.468533713	13
0.058526339	17.08632416	1.512589725	14
0.05376658	18.59891389	1.557967417	15
0.049610849	20.1568813	1.604706439	16
0.045952529	21.76158774	1.652847632	17
0.042708696	23.41443537	1.702433061	18

معدل الفائدة i=0.03			
$1/s_{\overline{n}\rceil i}$	$s_{\overline{n}\rceil i}$	u^n	n
0.039813881	25.11686844	1.753506053	19
0.037215708	26.87037449	1.806111235	20
0.034871776	28.67648572	1.860294572	21
0.032747395	30.5367803	1.916103409	22
0.030813903	32.4528837	1.973586511	23
0.029047416	34.42647022	2.032794106	24
0.027427871	36.45926432	2.09377793	25
0.02593829	38.55304225	2.156591268	26
0.02456421	40.70963352	2.221289006	27
0.023293233	42.93092252	2.287927676	28
0.022114671	45.2188502	2.356565506	29
0.021019259	47.57541571	2.427262471	30
0.019998929	50.00267818	2.500080345	31
0.019046618	52.50275852	2.575082756	32
0.018156122	55.07784128	2.652335238	33
0.017321963	57.73017652	2.731905296	34
0.016539292	60.46208181	2.813862454	35
0.015803794	63.27594427	2.898278328	36
0.015111624	66.17422259	2.985226678	37
0.01445934	69.15944927	3.074783478	38

معدل الفائدة i=0.03			
$1/S_{\overline{n}\|i}$	$S_{\overline{n}\|i}$	u^n	n
0.013843852	72.23423275	3.167026983	39
0.013262378	75.40125973	3.262037792	40
0.012712409	78.66329753	3.359898926	41
0.012191673	82.02319645	3.460695894	42
0.01169811	85.48389234	3.56451677	43
0.011229847	89.04840911	3.671452273	44
0.010785176	92.71986139	3.781595842	45
0.010362538	96.50145723	3.895043717	46
0.009960506	100.3965009	4.011895028	47
0.009577774	104.408396	4.132251879	48

معدل الفائدة i=0.04			
$1/S_{\overline{n}\|i}$	$S_{\overline{n}\|i}$	u^n	n
1	1	1.04	1
0.490196078	2.04	1.0816	2
0.320348539	3.1216	1.124864	3
0.235490045	4.246464	1.16985856	4
0.184627113	5.41632256	1.216652902	5

معدل الفائدة i=0.04			
$1/S_{\overline{n}\vert i}$	$S_{\overline{n}\vert i}$	u^n	n
0.150761903	6.632975462	1.265319018	6
0.126609612	7.898294481	1.315931779	7
0.108527832	9.21422626	1.36856905	8
0.094492993	10.58279531	1.423311812	9
0.083290944	12.00610712	1.480244285	10
0.074149039	13.48635141	1.539454056	11
0.066552173	15.02580546	1.601032219	12
0.060143728	16.62683768	1.665073507	13
0.054668973	18.29191119	1.731676448	14
0.0499411	20.02358764	1.800943506	15
0.045819999	21.82453114	1.872981246	16
0.042198522	23.69751239	1.947900496	17
0.038993328	25.64541288	2.025816515	18
0.036138618	27.6712294	2.106849176	19
0.03358175	29.77807858	2.191123143	20
0.031280105	31.96920172	2.278768069	21
0.029198811	34.24796979	2.369918792	22
0.027309057	36.61788858	2.464715543	23
0.025586831	39.08260412	2.563304165	24
0.024011963	41.64590829	2.665836331	25

معدل الفائدة i=0.04			
$1/S_{\overline{n}\|i}$	$S_{\overline{n}\|i}$	u^{n}	n
0.02256738	44.31174462	2.772469785	26
0.021238541	47.0842144	2.883368576	27
0.020012975	49.96758298	2.998703319	28
0.018879934	52.9662863	3.118651452	29
0.017830099	56.08493775	3.24339751	30
0.016855352	59.32833526	3.37313341	31
0.01594859	62.70146867	3.508058747	32
0.015103566	66.20952742	3.648381097	33
0.014314772	69.85790851	3.794316341	34
0.013577322	73.65222486	3.946088994	35
0.012886878	77.59831385	4.103932554	36
0.012239566	81.7022464	4.268089856	37
0.011631919	85.97033626	4.43881345	38
0.011060827	90.40914971	4.616365988	39
0.010523489	95.0255157	4.801020628	40
0.010017377	99.82653633	4.993061453	41
0.009540201	104.8195978	5.192783911	42
0.009089886	110.0123817	5.400495268	43
0.008664544	115.412877	5.616515078	44
0.008262456	121.029392	5.841175681	45

معدل الفائدة i=0.04			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^n	n
0.007882049	126.8705677	6.074822709	46
0.007521885	132.9453904	6.317815617	47
0.007180648	139.263206	6.570528242	48

معدل الفائدة i=0.05			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^n	n
1	1	1.05	1
0.487804878	2.05	1.1025	2
0.317208565	3.1525	1.157625	3
0.232011833	4.310125	1.21550625	4
0.180974798	5.52563125	1.276281563	5
0.147017468	6.801912813	1.340095641	6
0.122819818	8.142008453	1.407100423	7
0.104721814	9.549108876	1.477455444	8
0.09069008	11.02656432	1.551328216	9
0.079504575	12.57789254	1.628894627	10
0.070388891	14.20678716	1.710339358	11
0.06282541	15.91712652	1.795856326	12
0.056455765	17.71298285	1.885649142	13

معدل الفائدة i=0.05			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^n	n
0.051023969	19.59863199	1.979931599	14
0.046342288	21.57856359	2.078928179	15
0.042269908	23.65749177	2.182874588	16
0.038699142	25.84036636	2.292018318	17
0.035546222	28.13238467	2.406619234	18
0.03274501	30.53900391	2.526950195	19
0.030242587	33.0659541	2.653297705	20
0.027996107	35.71925181	2.78596259	21
0.025970509	38.5052144	2.92526072	22
0.024136822	41.43047512	3.071523756	23
0.022470901	44.50199887	3.225099944	24
0.020952457	47.72709882	3.386354941	25
0.019564321	51.11345376	3.555672688	26
0.01829186	54.66912645	3.733456322	27
0.01712253	58.40258277	3.920129138	28
0.016045515	62.32271191	4.116135595	29
0.015051435	66.4388475	4.321942375	30
0.01413212	70.76078988	4.538039494	31
0.013280419	75.29882937	4.764941469	32
0.012490044	80.06377084	5.003188542	33
0.011755445	85.06695938	5.253347969	34
0.011071707	90.32030735	5.516015368	35
0.010434457	95.83632272	5.791816136	36

معدل الفائدة i=0.05			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^n	n
0.009839794	101.6281389	6.081406943	37
0.009284228	107.7095458	6.38547729	38
0.008764624	114.0950231	6.704751154	39
0.008278161	120.7997742	7.039988712	40
0.007822292	127.839763	7.391988148	41
0.007394713	135.2317511	7.761587555	42
0.006993333	142.9933387	8.149666933	43
0.006616251	151.1430056	8.55715028	44
0.006261735	159.7001559	8.985007793	45
0.005928204	168.6851637	9.434258183	46
0.005614211	178.1194218	9.905971092	47
0.005318431	188.0253929	10.40126965	48

معدل الفائدة i=0.06			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^n	n
1	1	1.06	1
0.485436893	2.06	1.1236	2
0.314109813	3.1836	1.191016	3
0.228591492	4.374616	1.26247696	4
0.1773964	5.63709296	1.338225578	5
0.143362628	6.975318538	1.418519112	6

معدل الفائدة i=0.06			
$1/s_{\overline{n}\rceil i}$	$s_{\overline{n}\rceil i}$	u^n	n
0.119135018	8.39383765	1.503630259	7
0.101035943	9.897467909	1.593848075	8
0.087022235	11.49131598	1.689478959	9
0.075867958	13.18079494	1.790847697	10
0.066792938	14.97164264	1.898298558	11
0.059277029	16.8699412	2.012196472	12
0.052960105	18.88213767	2.13292826	13
0.047584909	21.01506593	2.260903956	14
0.042962764	23.27596988	2.396558193	15
0.038952144	25.67252808	2.540351685	16
0.035444804	28.21287976	2.692772786	17
0.032356541	30.90565255	2.854339153	18
0.02962086	33.7599917	3.025599502	19
0.027184557	36.7855912	3.207135472	20
0.025004547	39.99272668	3.399563601	21
0.023045569	43.39229028	3.603537417	22
0.021278485	46.99582769	3.819749662	23
0.019679005	50.81557735	4.048934641	24
0.018226718	54.864512	4.29187072	25
0.016904347	59.15638272	4.549382963	26

معدل الفائدة i=0.06			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^n	n
0.015697166	63.70576568	4.822345941	27
0.014592552	68.52811162	5.111686697	28
0.013579614	73.63979832	5.418387899	29
0.012648911	79.05818622	5.743491173	30
0.01179222	84.80167739	6.088100643	31
0.011002337	90.88977803	6.453386682	32
0.010272935	97.34316471	6.840589883	33
0.009598425	104.1837546	7.251025276	34
0.008973859	111.4347799	7.686086792	35
0.008394835	119.1208667	8.147252	36
0.007857427	127.2681187	8.63608712	37
0.007358124	135.9042058	9.154252347	38
0.006893772	145.0584581	9.703507488	39
0.006461536	154.7619656	10.28571794	40
0.006058855	165.0476836	10.90286101	41
0.005683415	175.9505446	11.55703267	42
0.005333118	187.5075772	12.25045463	43
0.005006057	199.7580319	12.98548191	44
0.004700496	212.7435138	13.76461083	45
0.004414853	226.5081246	14.59048748	46

معدل الفائدة i=0.06			
$1/S_{\overline{n}\mid i}$	$S_{\overline{n}\mid i}$	u^n	n
0.00414768	241.0986121	15.46591673	47
0.003897655	256.5645288	16.39387173	48

معدل الفائدة i=0.07			
$1/S_{\overline{n}\mid i}$	$S_{\overline{n}\mid i}$	u^n	n
1	1	1.07	1
0.483091787	2.07	1.1449	2
0.311051666	3.2149	1.225043	3
0.225228117	4.439943	1.31079601	4
0.173890694	5.75073901	1.402551731	5
0.1397958	7.153290741	1.500730352	6
0.11555322	8.654021093	1.605781476	7
0.097467762	10.25980257	1.71818618	8
0.08348647	11.97798875	1.838459212	9
0.072377503	13.81644796	1.967151357	10
0.063356905	15.78359932	2.104851952	11
0.055901989	17.88845127	2.252191589	12
0.049650848	20.14064286	2.409845	13
0.044344939	22.55048786	2.57853415	14

معدل الفائدة

i=0.07

$1/S_{\overline{n}\mid i}$	$S_{\overline{n}\mid i}$	u^n	n
0.039794625	25.12902201	2.759031541	15
0.035857648	27.88805355	2.952163749	16
0.032425193	30.8402173	3.158815211	17
0.029412602	33.99903251	3.379932276	18
0.026753015	37.37896479	3.616527535	19
0.024392926	40.99549232	3.869684462	20
0.022289002	44.86517678	4.140562375	21
0.020405773	49.00573916	4.430401741	22
0.018713926	53.4361409	4.740529863	23
0.017189021	58.17667076	5.072366953	24
0.015810517	63.24903772	5.42743264	25
0.014561028	68.67647036	5.807352925	26
0.013425734	74.48382328	6.21386763	27
0.012391928	80.69769091	6.648838364	28
0.011448652	87.34652927	7.114257049	29
0.010586404	94.46078632	7.612255043	30
0.009796906	102.0730414	8.145112896	31
0.009072915	110.2181543	8.715270798	32
0.008408065	118.9334251	9.325339754	33
0.007796738	128.2587648	9.978113537	34

معدل الفائدة i=0.07			
$1/S_{\overline{n}\|i}$	$S_{\overline{n}\|i}$	u^n	n
0.00723396	138.2368784	10.67658148	35
0.00671531	148.9134598	11.42394219	36
0.006236848	160.337402	12.22361814	37
0.005795052	172.5610202	13.07927141	38
0.005386762	185.6402916	13.99482041	39
0.005009139	199.635112	14.97445784	40
0.004659624	214.6095698	16.02266989	41
0.004335907	230.6322397	17.14425678	42
0.004035895	247.7764965	18.34435475	43
0.003757691	266.1208513	19.62845959	44
0.003499571	285.7493108	21.00245176	45
0.003259965	306.7517626	22.47262338	46
0.003037442	329.224386	24.04570702	47
0.002830695	353.270093	25.72890651	48

معدل الفائدة i=0.08			
$1/S_{\overline{n}\|i}$	$S_{\overline{n}\|i}$	u^n	n

معدل الفائدة i=0.08			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^{n}	n
1	1	1.08	1
0.480769231	2.08	1.1664	2
0.308033514	3.2464	1.259712	3
0.221920804	4.506112	1.36048896	4
0.170456455	5.86660096	1.469328077	5
0.136315386	7.335929037	1.586874323	6
0.112072401	8.92280336	1.713824269	7
0.094014761	10.63662763	1.85093021	8
0.080079709	12.48755784	1.999004627	9
0.069029489	14.48656247	2.158924997	10
0.060076342	16.64548746	2.331638997	11
0.052695017	18.97712646	2.518170117	12
0.046521805	21.49529658	2.719623726	13
0.041296853	24.2149203	2.937193624	14
0.036829545	27.15211393	3.172169114	15
0.032976872	30.32428304	3.425942643	16
0.029629431	33.75022569	3.700018055	17
0.026702096	37.45024374	3.996019499	18
0.024127627	41.44626324	4.315701059	19
0.021852209	45.7619643	4.660957144	20

معدل الفائدة i=0.08			
$1/S_{\overline{n}\|i}$	$S_{\overline{n}\|i}$	u^n	n
0.01983225	50.42292144	5.033833715	21
0.018032068	55.45675516	5.436540413	22
0.016422169	60.89329557	5.871463646	23
0.014977962	66.76475922	6.341180737	24
0.013678779	73.10593995	6.848475196	25
0.012507127	79.95441515	7.396353212	26
0.011448096	87.35076836	7.988061469	27
0.010488906	95.33882983	8.627106386	28
0.009618535	103.9659362	9.317274897	29
0.008827433	113.2832111	10.06265689	30
0.008107284	123.345868	10.86766944	31
0.007450813	134.2135374	11.737083	32
0.006851632	145.9506204	12.67604964	33
0.00630411	158.6266701	13.69013361	34
0.005803265	172.3168037	14.78534429	35
0.005344674	187.102148	15.96817184	36
0.004924403	203.0703198	17.24562558	37
0.004538936	220.3159454	18.62527563	38
0.00418513	238.941221	20.11529768	39
0.003860162	259.0565187	21.7245215	40

معدل الفائدة i=0.08			
$1/S_{n\|i}$	$S_{n\|i}$	u^{n}	n
0.003561494	280.7810402	23.46248322	41
0.003286841	304.2435234	25.33948187	42
0.003034137	329.5830053	27.36664042	43
0.002801516	356.9496457	29.55597166	44
0.002587285	386.5056174	31.92044939	45
0.002389908	418.4260668	34.47408534	46
0.002207992	452.9001521	37.23201217	47
0.002040266	490.1321643	40.21057314	48

معدل الفائدة i=0.09			
$1/S_{n\|i}$	$S_{n\|i}$	u^{n}	n
1	1	1.09	1
0.4784689	2.09	1.1881	2
0.305054757	3.2781	1.295029	3
0.218668662	4.573129	1.41158161	4
0.167092457	5.98471061	1.538623955	5
0.132919783	7.523334565	1.677100111	6
0.108690517	9.200434676	1.828039121	7
0.090674378	11.0284738	1.992562642	8

معدل الفائدة i=0.09			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^n	n
0.076798802	13.02103644	2.171893279	9
0.06582009	15.19292972	2.367363675	10
0.056946657	17.56029339	2.580426405	11
0.049650658	20.1407198	2.812664782	12
0.04356656	22.95338458	3.065804612	13
0.038433173	26.01918919	3.341727027	14
0.034058883	29.36091622	3.64248246	15
0.03029991	33.00339868	3.970305881	16
0.027046248	36.97370456	4.32763341	17
0.024212291	41.30133797	4.717120417	18
0.021730411	46.01845839	5.141661255	19
0.019546475	51.16011964	5.604410768	20
0.017616635	56.76453041	6.108807737	21
0.015904993	62.87333815	6.658600433	22
0.01438188	69.53193858	7.257874472	23
0.013022561	76.78981305	7.911083175	24
0.011806251	84.70089623	8.62308066	25
0.01071536	93.32397689	9.39915792	26
0.009734905	102.7231348	10.24508213	27
0.008852047	112.9682169	11.16713952	28

معدل الفائدة i=0.09			
$1/S_{\overline{n}\rceil i}$	$S_{\overline{n}\rceil i}$	u^{n}	n
0.008055723	124.1353565	12.17218208	29
0.007336351	136.3075385	13.26767847	30
0.0066856	149.575217	14.46176953	31
0.006096186	164.0369865	15.76332879	32
0.005561726	179.8003153	17.18202838	33
0.005076597	196.9823437	18.72841093	34
0.004635837	215.7107547	20.41396792	35
0.00423505	236.1247226	22.25122503	36
0.003870329	258.3759476	24.25383528	37
0.003538198	282.6297829	26.43668046	38
0.00323555	309.0664633	28.8159817	39
0.002959609	337.882445	31.40942005	40
0.002707885	369.2918651	34.23626786	41
0.002478142	403.528133	37.31753197	42
0.002268368	440.8456649	40.67610984	43
0.002076749	481.5217748	44.33695973	44
0.001901651	525.8587345	48.3272861	45
0.001741596	574.1860206	52.67674185	46
0.001595245	626.8627625	57.41764862	47
0.001461389	684.2804111	62.585237	48

معدل الفائدة i=0.10			
$1/S_{\overline{n}\rvert i}$	$S_{\overline{n}\rvert i}$	u^n	n
1	1	1.1	1
0.476190476	2.1	1.21	2
0.302114804	3.31	1.331	3
0.215470804	4.641	1.4641	4
0.163797481	6.1051	1.61051	5
0.12960738	7.71561	1.771561	6
0.1054055	9.487171	1.9487171	7
0.087444018	11.4358881	2.14358881	8
0.073640539	13.57947691	2.357947691	9
0.062745395	15.9374246	2.59374246	10
0.053963142	18.53116706	2.853116706	11
0.046763315	21.38428377	3.138428377	12
0.040778524	24.52271214	3.452271214	13
0.035746223	27.97498336	3.797498336	14
0.031473777	31.77248169	4.177248169	15
0.027816621	35.94972986	4.594972986	16
0.024664134	40.54470285	5.054470285	17
0.021930222	45.59917313	5.559917313	18

معدل الفائدة
i=0.10

$1/S_{\overline{n}\|i}$	$S_{\overline{n}\|i}$	u^n	n
0.019546868	51.15909045	6.115909045	19
0.017459625	57.27499949	6.727499949	20
0.01562439	64.00249944	7.400249944	21
0.014005063	71.40274939	8.140274939	22
0.012571813	79.54302433	8.954302433	23
0.011299776	88.49732676	9.849732676	24
0.010168072	98.34705943	10.83470594	25
0.009159039	109.1817654	11.91817654	26
0.008257642	121.0999419	13.10999419	27
0.007451013	134.2099361	14.42099361	28
0.006728075	148.6309297	15.86309297	29
0.006079248	164.4940227	17.44940227	30
0.005496214	181.943425	19.1943425	31
0.004971717	201.1377675	21.11377675	32
0.004499406	222.2515442	23.22515442	33
0.004073706	245.4766986	25.54766986	34
0.003689705	271.0243685	28.10243685	35
0.003343064	299.1268053	30.91268053	36
0.00302994	330.0394859	34.00394859	37
0.002746925	364.0434344	37.40434344	38

معدل الفائدة i=0.10			
$1/S_{\overline{n}\vert i}$	$S_{\overline{n}\vert i}$	u^n	n
0.002490984	401.4477779	41.14477779	39
0.002259414	442.5925557	45.25925557	40
0.002049803	487.8518112	49.78518112	41
0.001859991	537.6369924	54.76369924	42
0.001688047	592.4006916	60.24006916	43
0.001532237	652.6407608	66.26407608	44
0.001391005	718.9048369	72.89048369	45
0.001262953	791.7953205	80.17953205	46
0.001146822	871.9748526	88.19748526	47
0.00104148	960.1723378	97.01723378	48

معدل الفائدة i=0.11			
$1/S_{\overline{n}\vert i}$	$S_{\overline{n}\vert i}$	u^n	n
1	1	1.11	1
0.473933649	2.11	1.2321	2
0.29921307	3.3421	1.367631	3
0.212326352	4.709731	1.51807041	4
0.16057031	6.22780141	1.685058155	5
0.126376564	7.912859565	1.870414552	6
0.102215269	9.783274117	2.076160153	7

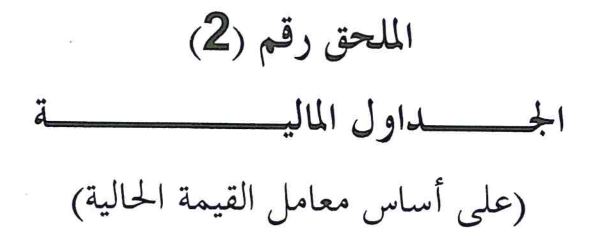
معدل الفائدة i=0.11			
$1/s_{\overline{n}\|i}$	$s_{\overline{n}\|i}$	u^n	n
0.084321054	11.85943427	2.30453777	8
0.070601664	14.16397204	2.558036924	9
0.059801427	16.72200896	2.839420986	10
0.051121007	19.56142995	3.151757295	11
0.044027286	22.71318724	3.498450597	12
0.038150993	26.21163784	3.883280163	13
0.033228202	30.094918	4.31044098	14
0.02906524	34.40535898	4.784589488	15
0.025516747	39.18994847	5.310894332	16
0.022471485	44.50084281	5.895092709	17
0.01984287	50.39593551	6.543552907	18
0.017562504	56.93948842	7.263343726	19
0.015575637	64.20283215	8.062311536	20
0.01383793	72.26514368	8.949165805	21
0.012313101	81.21430949	9.933574044	22
0.010971182	91.14788353	11.02626719	23
0.009787211	102.1741507	12.23915658	24
0.008740242	114.4133073	13.5854638	25
0.007812575	127.9987711	15.07986482	26
0.006989164	143.0786359	16.73864995	27
0.006257145	159.8172859	18.57990145	28

معدل الفائدة i=0.11			
$1/S_{\overline{n}\|i}$	$S_{\overline{n}\|i}$	u^n	n
0.00560547	178.3971873	20.62369061	29
0.005024598	199.0208779	22.89229657	30
0.004506267	221.9131745	25.41044919	31
0.004043285	247.3236237	28.20559861	32
0.003629379	275.5292223	31.30821445	33
0.003259055	306.8374368	34.75211804	34
0.00292749	341.5895548	38.57485103	35
0.002630441	380.1644058	42.81808464	36
0.002364164	422.9824905	47.52807395	37
0.002125351	470.5105644	52.75616209	38
0.001911071	523.2667265	58.55933991	39
0.001718727	581.8260664	65.00086731	40
0.001546009	646.8269337	72.15096271	41
0.001390863	718.9778964	80.08756861	42
0.001251462	799.065465	88.89720115	43
0.001126173	887.9626662	98.67589328	44
0.001013542	986.6385595	109.5302415	45
0.000912268	1096.168801	121.5785681	46
0.000821188	1217.747369	134.9522106	47
0.000739262	1352.69958	149.7969538	48

معدل الفائدة i=0.12			
$1/S_{\overline{n}\|i}$	$S_{\overline{n}\|i}$	u^n	n
1	1	1.12	1
0.471698113	2.12	1.2544	2
0.296348981	3.3744	1.404928	3
0.209234436	4.779328	1.57351936	4
0.157409732	6.35284736	1.762341683	5
0.123225718	8.115189043	1.973822685	6
0.099117736	10.08901173	2.210681407	7
0.081302841	12.29969314	2.475963176	8
0.067678889	14.77565631	2.773078757	9
0.056984164	17.54873507	3.105848208	10
0.048415404	20.65458328	3.478549993	11
0.041436808	24.13313327	3.895975993	12
0.035677195	28.02910926	4.363493112	13
0.030871246	32.39260238	4.887112285	14
0.02682424	37.27971466	5.473565759	15
0.023390018	42.75328042	6.13039365	16
0.020456728	48.88367407	6.866040888	17
0.017937311	55.74971496	7.689965795	18
0.015763005	63.43968075	8.61276169	19
0.01387878	72.05244244	9.646293093	20

0.012240092	81.69873554	10.80384826	21
0.010810509	92.5025838	12.10031006	22
0.009559965	104.6028939	13.55234726	23
0.008463442	118.1552411	15.17862893	24
0.00749997	133.3338701	17.00006441	25
0.006651858	150.3339345	19.04007214	26
0.005904094	169.3740066	21.32488079	27
0.005243869	190.6988874	23.88386649	28
0.004660207	214.5827539	26.74993047	29
0.004143658	241.3326843	29.95992212	30
0.003686057	271.2926065	33.55511278	31
0.003280326	304.8477192	37.58172631	32
0.00292031	342.4294455	42.09153347	33
0.002600638	384.520979	47.14251748	34
0.002316619	431.6634965	52.79961958	35
0.002064141	484.4631161	59.13557393	36
0.001839592	543.59869	66.2318428	37
0.0016398	609.8305328	74.17966394	38
0.001461967	684.0101967	83.08122361	39
0.001303626	767.0914203	93.05097044	40
0.001162598	860.1423908	104.2170869	41
0.001036958	964.3594777	116.7231373	42
0.000924999	1081.082615	130.7299138	43

0.00082521	1211.812529	146.4175035	44
0.000736252	1358.230032	163.9876039	45
0.000656936	1522.217636	183.6661163	46
0.000586206	1705.883752	205.7060503	47
0.000523125	1911.589803	230.3907763	48



الملحق رقم (2)

الجـــــــداول الماليـــــــــــــة

(على أساس معامل القيمة الحالية)

i=0.01 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
1.01	0.99009901	0.99009901	1
0.507512438	1.970395059	0.980296049	2
0.340022111	2.940985207	0.970590148	3
0.256281094	3.901965552	0.960980344	4
0.2060398	4.853431239	0.951465688	5
0.172548367	5.795476475	0.942045235	6
0.148628283	6.728194529	0.932718055	7
0.130690292	7.651677752	0.923483222	8
0.116740363	8.566017576	0.914339824	9
0.105582077	9.471304531	0.905286955	10
0.096454076	10.36762825	0.896323718	11
0.088848789	11.25507747	0.887449225	12
0.08241482	12.13374007	0.878662599	13
0.076901172	13.00370304	0.86996297	14
0.07212378	13.86505252	0.861349475	15
0.067944597	14.71787378	0.852821262	16
0.064258055	15.56225127	0.844377487	17
0.060982048	16.39826858	0.836017314	18
0.058051754	17.2260085	0.827739915	19
0.055415315	18.04555297	0.81954447	20
0.053030752	18.85698313	0.811430169	21

i=0.01 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n\rceil}i}$	$a_{\overline{n\rceil}i}$	u^{-n}	n
0.050863718	19.66037934	0.803396207	22
0.04888584	20.45582113	0.7954 41789	23
0.047073472	21.24338726	0.787566127	24
0.045406753	22.0231557	0.779768443	25
0.043868878	22.79520366	0.772047963	26
0.042445529	23.55960759	0.764403924	27
0.041124436	24.31644316	0.756835568	28
0.03989502	25.0657853	0.749342147	29
0.038748113	25.80770822	0.741922918	30
0.037675731	26.54228537	0.734577146	31
0.036670886	27.26958947	0.727304105	32
0.035727438	27.98969255	0.720103075	33
0.034839969	28.70266589	0.712973341	34
0.034003682	29.40858009	0.705914199	35
0.03321431	30.10750504	0.69892495	36
0.032468049	30.79950994	0.692004901	37
0.031761496	31.4846633	0.685153367	38
0.031091595	32.16303298	0.67836967	39
0.030455598	32.83468611	0.671653139	40
0.029851023	33.49968922	0.665003108	41
0.029275626	34.15810814	0.658418919	42

i=0.01 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\mid i}$	$a_{\overline{n}\mid i}$	u^{-n}	n
0.028727371	34.81000806	0.651899919	43
0.028204406	35.45545352	0.645445465	44
0.027705046	36.09450844	0.639054916	45
0.02722775	36.72723608	0.632727639	46
0.02677111	37.35369909	0.626463009	47
0.026333835	37.97395949	0.620260405	48

i=0.02 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\mid i}$	$a_{\overline{n}\mid i}$	u^{-n}	n
1.02	0.980392157	0.980392157	1
0.515049505	1.941560938	0.961168781	2
0.346754673	2.883883273	0.942322335	3
0.262623753	3.807728699	0.923845426	4
0.212158394	4.713459509	0.90573081	5
0.178525812	5.601430891	0.887971382	6
0.154511956	6.471991069	0.870560179	7
0.136509799	7.32548144	0.853490371	8
0.122515437	8.162236706	0.836755266	9
0.111326528	8.982585006	0.8203483	10

i=0.02

معدل الفائدة

$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.102177943	9.786848045	0.804263039	11
0.094559597	10.57534122	0.788493176	12
0.088118353	11.34837375	0.773032525	13
0.08260197	12.10624877	0.757875025	14
0.077825472	12.8492635	0.74301473	15
0.073650126	13.57770931	0.728445814	16
0.069969841	14.29187188	0.714162562	17
0.066702102	14.99203125	0.700159375	18
0.063781766	15.67846201	0.68643076	19
0.061156718	16.35143334	0.672971333	20
0.058784769	17.01120916	0.659775817	21
0.056631401	17.6580482	0.646839036	22
0.054668098	18.29220412	0.634155918	23
0.052871097	18.9139256	0.621721488	24
0.051220438	19.52345647	0.609530871	25
0.049699231	20.12103576	0.597579285	26
0.048293086	20.7068978	0.585862044	27
0.046989672	21.28127236	0.574374553	28
0.045778355	21.84438466	0.563112307	29
0.044649922	22.39645555	0.552070889	30
0.043596347	22.93770152	0.54124597	31

i=0.02 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rvert i}$	$a_{\overline{n}\rvert i}$	u^{-n}	n
0.042610607	23.46833482	0.530633304	32
0.041686531	23.98856355	0.520228729	33
0.040818673	24.49859172	0.510028166	34
0.040002209	24.99861933	0.500027613	35
0.039232853	25.48884248	0.49022315	36
0.038506779	25.96945341	0.480610932	37
0.037820566	26.4406406	0.471187188	38
0.037171144	26.90258883	0.461948223	39
0.036555748	27.35547924	0.452890415	40
0.035971884	27.79948945	0.444010211	41
0.035417295	28.23479358	0.435304128	42
0.034889933	28.66156233	0.426768753	43
0.034387939	29.07996307	0.418400739	44
0.033909616	29.49015987	0.410196803	45
0.033453416	29.8923136	0.402153728	46
0.033017922	30.28658196	0.394268361	47
0.032601836	30.67311957	0.386537609	48

i=0.03

معدل الفائدة

$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
1.03	0.970873786	0.970873786	1
0.522610837	1.913469696	0.942595909	2
0.353530363	2.828611355	0.915141659	3
0.269027045	3.717098403	0.888487048	4
0.218354571	4.579707187	0.862608784	5
0.1845975	5.417191444	0.837484257	6
0.160506354	6.230282955	0.813091511	7
0.142456389	7.01969219	0.789409234	8
0.128433857	7.786108922	0.766416732	9
0.117230507	8.530202837	0.744093915	10
0.108077448	9.252624113	0.722421277	11
0.100462085	9.954003994	0.70137988	12
0.094029544	10.63495533	0.68095134	13
0.088526339	11.29607314	0.661117806	14
0.08376658	11.93793509	0.641861947	15
0.079610849	12.56110203	0.623166939	16
0.075952529	13.16611847	0.605016446	17
0.072708696	13.75351308	0.587394608	18
0.069813881	14.32379911	0.570286027	19
0.067215708	14.87747486	0.553675754	20
0.064871776	15.41502414	0.537549276	21

i=0.03 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.062747395	15.93691664	0.521892501	22
0.060813903	16.44360839	0.506691748	23
0.059047416	16.93554212	0.491933736	24
0.057427871	17.41314769	0.477605569	25
0.05593829	17.87684242	0.463694727	26
0.05456421	18.32703147	0.450189056	27
0.053293233	18.76410823	0.437076753	28
0.052114671	19.18845459	0.424346362	29
0.051019259	19.60044135	0.41198676	30
0.049998929	20.00042849	0.399987145	31
0.049046618	20.38876553	0.388337034	32
0.048156122	20.76579178	0.377026247	33
0.047321963	21.13183668	0.3660449	34
0.046539292	21.48722007	0.355383398	35
0.045803794	21.8322525	0.345032425	36
0.045111624	22.16723544	0.334982937	37
0.04445934	22.49246159	0.325226152	38
0.043843852	22.80821513	0.315753546	39
0.043262378	23.11477197	0.306556841	40
0.042712409	23.41239997	0.297628001	41
0.042191673	23.7013592	0.288959224	42

i=0.03 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.04169811	23.98190213	0.280542936	43
0.041229847	24.25427392	0.272371782	44
0.040785176	24.51871254	0.264438624	45
0.040362538	24.77544907	0.256736528	46
0.039960506	25.02470783	0.249258765	47
0.039577774	25.26670664	0.241998801	48

i=0.04 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
1.04	0.961538462	0.961538462	1
0.530196078	1.886094675	0.924556213	2
0.360348539	2.775091033	0.888996359	3
0.275490045	3.629895224	0.854804191	4
0.224627113	4.451822331	0.821927107	5
0.190761903	5.242136857	0.790314526	6
0.166609612	6.00205467	0.759917813	7
0.148527832	6.732744875	0.730690205	8
0.134492993	7.435331611	0.702586736	9

i=0.04

معدل الفائدة

$1/a_{\overline{n}\vert i}$	$a_{\overline{n}\vert i}$	u^{-n}	n
0.123290944	8.110895779	0.675564169	10
0.114149039	8.760476711	0.649580932	11
0.106552173	9.38507376	0.62459705	12
0.100143728	9.985647847	0.600574086	13
0.094668973	10.56312293	0.577475083	14
0.0899411	11.11838743	0.555264503	15
0.085819999	11.65229561	0.533908176	16
0.082198522	12.16566885	0.513373246	17
0.078993328	12.65929697	0.493628121	18
0.076138618	13.1339394	0.474642424	19
0.07358175	13.59032634	0.456386946	20
0.071280105	14.02915995	0.438833602	21
0.069198811	14.45111533	0.421955387	22
0.067309057	14.85684167	0.405726333	23
0.065586831	15.24696314	0.390121474	24
0.064011963	15.62207994	0.375116802	25
0.06256738	15.98276918	0.360689233	26
0.061238541	16.32958575	0.34681657	27
0.060012975	16.66306322	0.333477471	28
0.058879934	16.98371463	0.320651415	29
0.057830099	17.2920333	0.308318668	30

i=0.04 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.056855352	17.58849356	0.296460258	31
0.05594859	17.8735515	0.28505794	32
0.055103566	18.14764567	0.274094173	33
0.054314772	18.41119776	0.26355209	34
0.053577322	18.66461323	0.253415471	35
0.052886878	18.90828195	0.243668722	36
0.052239566	19.1425788	0.234296848	37
0.051631919	19.36786423	0.225285431	38
0.051060827	19.58448484	0.216620606	39
0.050523489	19.79277388	0.208289045	40
0.050017377	19.99305181	0.200277928	41
0.049540201	20.18562674	0.19257493	42
0.049089886	20.37079494	0.185168202	43
0.048664544	20.54884129	0.178046348	44
0.048262456	20.7200397	0.171198412	45
0.047882049	20.88465356	0.164613858	46
0.047521885	21.04293612	0.158282555	47
0.047180648	21.19513088	0.152194765	48

i=0.05 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n\rceil}i}$	$a_{\overline{n\rceil}i}$	u^{-n}	n
1.05	0.952380952	0.952380952	1
0.537804878	1.859410431	0.907029478	2
0.367208565	2.723248029	0.863837599	3
0.282011833	3.545950504	0.822702475	4
0.230974798	4.329476671	0.783526166	5
0.197017468	5.075692067	0.746215397	6
0.172819818	5.786373397	0.71068133	7
0.154721814	6.463212759	0.676839362	8
0.14069008	7.107821676	0.644608916	9
0.129504575	7.721734929	0.613913254	10
0.120388891	8.306414218	0.584679289	11
0.11282541	8.863251636	0.556837418	12
0.106455765	9.393572987	0.530321351	13
0.101023969	9.89864094	0.505067953	14
0.096342288	10.37965804	0.481017098	15
0.092269908	10.83776956	0.458111522	16
0.088699142	11.27406625	0.436296688	17
0.085546222	11.6895869	0.415520655	18
0.08274501	12.08532086	0.395733957	19
0.080242587	12.46221034	0.376889483	20
0.077996107	12.82115271	0.358942365	21

i=0.05 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.075970509	13.16300258	0.341849871	22
0.074136822	13.48857388	0.325571306	23
0.072470901	13.79864179	0.31006791	24
0.070952457	14.09394457	0.295302772	25
0.069564321	14.3751853	0.281240735	26
0.06829186	14.64303362	0.267848319	27
0.06712253	14.89812726	0.255093637	28
0.066045515	15.14107358	0.242946321	29
0.065051435	15.37245103	0.231377449	30
0.06413212	15.5928105	0.220359475	31
0.063280419	15.80267667	0.209866167	32
0.062490044	16.00254921	0.19987254	33
0.061755445	16.19290401	0.1903548	34
0.061071707	16.37419429	0.181290285	35
0.060434457	16.54685171	0.172657415	36
0.059839794	16.71128734	0.164435633	37
0.059284228	16.86789271	0.156605365	38
0.058764624	17.01704067	0.149147966	39
0.058278161	17.15908635	0.142045682	40
0.057822292	17.29436796	0.135281602	41
0.057394713	17.42320758	0.128839621	42

i=0.05 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.056993333	17.54591198	0.122704401	43
0.056616251	17.66277331	0.116861334	44
0.056261735	17.77406982	0.111296509	45
0.055928204	17.8800665	0.105996675	46
0.055614211	17.98101571	0.100949214	47
0.055318431	18.07715782	0.096142109	48

i=0.06 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
1.06	0.943396226	0.943396226	1
0.545436893	1.833392666	0.88999644	2
0.374109813	2.673011949	0.839619283	3
0.288591492	3.465105613	0.792093663	4
0.2373964	4.212363786	0.747258173	5
0.203362628	4.917324326	0.70496054	6
0.179135018	5.58238144	0.665057114	7
0.161035943	6.209793811	0.627412371	8
0.147022235	6.801692274	0.591898464	9

i=0.06 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rvert i}$	$a_{\overline{n}\rvert i}$	u^{-n}	n
0.135867958	7.360087051	0.558394777	10
0.126792938	7.886874577	0.526787525	11
0.119277029	8.38384394	0.496969364	12
0.112960105	8.852682963	0.468839022	13
0.107584909	9.294983927	0.442300964	14
0.102962764	9.712248988	0.417265061	15
0.098952144	10.10589527	0.393646284	16
0.095444804	10.47725969	0.371364419	17
0.092356541	10.82760348	0.350343791	18
0.08962086	11.15811649	0.33051301	19
0.087184557	11.46992122	0.311804727	20
0.085004547	11.76407662	0.294155403	21
0.083045569	12.04158172	0.277505097	22
0.081278485	12.30337898	0.261797261	23
0.079679005	12.55035753	0.246978548	24
0.078226718	12.78335616	0.232998631	25
0.076904347	13.00316619	0.219810029	26
0.075697166	13.21053414	0.207367952	27
0.074592552	13.40616428	0.195630143	28
0.073579614	13.59072102	0.184556739	29
0.072648911	13.76483115	0.174110131	30

i=0.06 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.07179222	13.92908599	0.16425484	31
0.071002337	14.08404339	0.154957397	32
0.070272935	14.23022961	0.146186223	33
0.069598425	14.36814114	0.137911531	34
0.068973859	14.49824636	0.130105218	35
0.068394835	14.62098713	0.122740772	36
0.067857427	14.73678031	0.115793181	37
0.067358124	14.84601916	0.10923885	38
0.066893772	14.94907468	0.103055519	39
0.066461536	15.04629687	0.097222188	40
0.066058855	15.13801592	0.091719045	41
0.065683415	15.22454332	0.086527401	42
0.065333118	15.30617294	0.081629624	43
0.065006057	15.38318202	0.077009079	44
0.064700496	15.45583209	0.072650074	45
0.064414853	15.5243699	0.068537806	46
0.06414768	15.58902821	0.064658308	47
0.063897655	15.65002661	0.060998403	48

i=0.07 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rvert i}$	$a_{\overline{n}\rvert i}$	u^{-n}	n
1.07	0.934579439	0.934579439	1
0.553091787	1.808018168	0.873438728	2
0.381051666	2.624316044	0.816297877	3
0.295228117	3.387211256	0.762895212	4
0.243890694	4.100197436	0.712986179	5
0.2097958	4.76653966	0.666342224	6
0.18555322	5.389289402	0.622749742	7
0.167467762	5.971298506	0.582009105	8
0.15348647	6.515232249	0.543933743	9
0.142377503	7.023581541	0.508349292	10
0.133356905	7.498674337	0.475092796	11
0.125901989	7.942686297	0.444011959	12
0.119650848	8.357650744	0.414964448	13
0.114344939	8.745467985	0.387817241	14
0.109794625	9.107914005	0.36244602	15
0.105857648	9.446648603	0.338734598	16
0.102425193	9.763222993	0.31657439	17
0.099412602	10.05908691	0.295863916	18
0.096753015	10.33559524	0.276508333	19
0.094392926	10.59401425	0.258419003	20
0.092289002	10.83552733	0.241513087	21

i=0.07 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.090405773	11.0612405	0.225713165	22
0.088713926	11.27218738	0.210946883	23
0.087189021	11.469334	0.19714662	24
0.085810517	11.65358318	0.184249178	25
0.084561028	11.82577867	0.172195493	26
0.083425734	11.98670904	0.160930367	27
0.082391928	12.13711125	0.150402212	28
0.081448652	12.27767407	0.140562815	29
0.080586404	12.40904118	0.131367117	30
0.079796906	12.53181419	0.122773007	31
0.079072915	12.64655532	0.114741128	32
0.078408065	12.75379002	0.107234699	33
0.077796738	12.85400936	0.100219345	34
0.07723396	12.9476723	0.093662939	35
0.07671531	13.03520776	0.087535457	36
0.076236848	13.1170166	0.081808838	37
0.075795052	13.19347345	0.076456858	38
0.075386762	13.26492846	0.071455008	39
0.075009139	13.33170884	0.066780381	40
0.074659624	13.39412041	0.062411571	41
0.074335907	13.45244898	0.058328571	42

i=0.07 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.074035895	13.50696167	0.054512683	43
0.073757691	13.5579081	0.050946433	44
0.073499571	13.60552159	0.047613489	45
0.073259965	13.65002018	0.044498588	46
0.073037442	13.69160764	0.041587465	47
0.072830695	13.73047443	0.03886679	48

i=0.08 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
1.08	0.925925926	0.925925926	1
0.560769231	1.783264746	0.85733882	2
0.388033514	2.577096987	0.793832241	3
0.301920804	3.31212684	0.735029853	4
0.250456455	3.992710037	0.680583197	5
0.216315386	4.622879664	0.630169627	6
0.192072401	5.206370059	0.583490395	7
0.174014761	5.746638944	0.540268885	8

i=0.08 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\vert i}$	$a_{\overline{n}\vert i}$	u^{-n}	n
0.160079709	6.246887911	0.500248967	9
0.149029489	6.710081399	0.463193488	10
0.140076342	7.138964258	0.428882859	11
0.132695017	7.536078017	0.397113759	12
0.126521805	7.903775942	0.367697925	13
0.121296853	8.244236983	0.340461041	14
0.116829545	8.559478688	0.315241705	15
0.112976872	8.851369155	0.291890468	16
0.109629431	9.121638107	0.270268951	17
0.106702096	9.371887136	0.250249029	18
0.104127627	9.6035992	0.231712064	19
0.101852209	9.818147407	0.214548207	20
0.09983225	10.01680316	0.198655748	21
0.098032068	10.20074366	0.183940507	22
0.096422169	10.37105895	0.170315284	23
0.094977962	10.52875828	0.157699337	24
0.093678779	10.67477619	0.146017905	25
0.092507127	10.80997795	0.135201764	26
0.091448096	10.93516477	0.125186818	27
0.090488906	11.05107849	0.115913721	28
0.089618535	11.15840601	0.107327519	29

i=0.08 معدل الفائدة			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.088827433	11.25778334	0.099377333	30
0.088107284	11.34979939	0.092016049	31
0.087450813	11.43499944	0.085200045	32
0.086851632	11.51388837	0.078888931	33
0.08630411	11.58693367	0.073045306	34
0.085803265	11.65456822	0.067634543	35
0.085344674	11.71719279	0.062624577	36
0.084924403	11.77517851	0.057985719	37
0.084538936	11.82886899	0.053690481	38
0.08418513	11.8785824	0.049713408	39
0.083860162	11.92461333	0.046030933	40
0.083561494	11.96723457	0.042621235	41
0.083286841	12.00669867	0.039464106	42
0.083034137	12.04323951	0.036540839	43
0.082801516	12.07707362	0.03383411	44
0.082587285	12.1084015	0.03132788	45
0.082389908	12.1374088	0.029007296	46
0.082207992	12.16426741	0.026858607	47
0.082040266	12.18913649	0.024869081	48

معدل الفائدة i=0.09			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
1.09	0.917431193	0.917431193	1
0.5684689	1.759111186	0.841679993	2
0.395054757	2.531294666	0.77218348	3
0.308668662	3.239719877	0.708425211	4
0.257092457	3.889651263	0.649931386	5
0.222919783	4.48591859	0.596267327	6
0.198690517	5.032952835	0.547034245	7
0.180674378	5.534819115	0.50186628	8
0.166798802	5.995246894	0.46042778	9
0.15582009	6.417657701	0.422410807	10
0.146946657	6.805190552	0.38753285	11
0.139650658	7.160725277	0.355534725	12
0.13356656	7.486903924	0.326178647	13
0.128433173	7.786150389	0.299246465	14
0.124058883	8.06068843	0.274538041	15
0.12029991	8.312558193	0.251869763	16
0.117046248	8.543631369	0.231073177	17
0.114212291	8.755625109	0.21199374	18
0.111730411	8.950114779	0.19448967	19
0.109546475	9.128545669	0.17843089	20

معدل الفائدة i=0.09			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.107616635	9.292243733	0.163698064	21
0.105904993	9.442425443	0.15018171	22
0.10438188	9.580206829	0.137781385	23
0.103022561	9.706611769	0.126404941	24
0.101806251	9.822579605	0.115967836	25
0.10071536	9.928972115	0.10639251	26
0.099734905	10.02657992	0.097607807	27
0.098852047	10.11612837	0.089548447	28
0.098055723	10.19828291	0.082154538	29
0.097336351	10.27365404	0.075371136	30
0.0966856	10.34280187	0.069147831	31
0.096096186	10.40624025	0.063438377	32
0.095561726	10.4644406	0.058200346	33
0.095076597	10.51783541	0.053394813	34
0.094635837	10.56682148	0.048986067	35
0.09423505	10.61176282	0.044941346	36
0.093870329	10.65299342	0.041230593	37
0.093538198	10.69081965	0.037826232	38
0.09323555	10.72552261	0.034702965	39
0.092959609	10.7573602	0.031837582	40
0.092707885	10.78656899	0.029208791	41

معدل الفائدة i=0.09			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.092478142	10.81336604	0.026797056	42
0.092268368	10.8379505	0.024584455	43
0.092076749	10.86050504	0.022554546	44
0.091901651	10.88119729	0.020692244	45
0.091741596	10.900181	0.01898371	46
0.091595245	10.91759725	0.017416248	47
0.091461389	10.93357546	0.015978209	48

معدل الفائدة i=0.10			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
1.1	0.909090909	0.909090909	1
0.576190476	1.73553719	0.826446281	2
0.402114804	2.486851991	0.751314801	3
0.315470804	3.169865446	0.683013455	4
0.263797481	3.790786769	0.620921323	5
0.22960738	4.355260699	0.56447393	6
0.2054055	4.868418818	0.513158118	7
0.187444018	5.334926198	0.46650738	8

معدل الفائدة i=0.10			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.173640539	5.759023816	0.424097618	9
0.162745395	6.144567106	0.385543289	10
0.153963142	6.495061005	0.350493899	11
0.146763315	6.813691823	0.318630818	12
0.140778524	7.103356203	0.28966438	13
0.135746223	7.366687457	0.263331254	14
0.131473777	7.606079506	0.239392049	15
0.127816621	7.823708642	0.217629136	16
0.124664134	8.021553311	0.197844669	17
0.121930222	8.201412101	0.17985879	18
0.119546868	8.364920092	0.163507991	19
0.117459625	8.51356372	0.148643628	20
0.11562439	8.648694291	0.135130571	21
0.114005063	8.771540264	0.122845974	22
0.112571813	8.883218422	0.111678158	23
0.111299776	8.98474402	0.101525598	24
0.110168072	9.077040018	0.092295998	25
0.109159039	9.160945471	0.083905453	26
0.108257642	9.237223156	0.076277684	27
0.107451013	9.306566505	0.069343349	28
0.106728075	9.369605914	0.063039409	29

معدل الفائدة i=0.10			
$1/a_{\overline{n\rceil}i}$	$a_{\overline{n\rceil}i}$	u^{-n}	n
0.106079248	9.426914467	0.057308553	30
0.105496214	9.479013152	0.052098685	31
0.104971717	9.526375593	0.047362441	32
0.104499406	9.569432357	0.043056764	33
0.104073706	9.60857487	0.039142513	34
0.103689705	9.644158973	0.035584103	35
0.103343064	9.676508157	0.032349184	36
0.10302994	9.705916506	0.029408349	37
0.102746925	9.732651369	0.026734863	38
0.102490984	9.75695579	0.024304421	39
0.102259414	9.779050718	0.022094928	40
0.102049803	9.799137017	0.020086298	41
0.101859991	9.817397288	0.018260271	42
0.101688047	9.833997535	0.016600247	43
0.101532237	9.849088668	0.015091133	44
0.101391005	9.86280788	0.013719212	45
0.101262953	9.875279891	0.012472011	46
0.101146822	9.886618082	0.011338192	47
0.10104148	9.89692553	0.010307447	48

معدل الفائدة i=0.11			
$1/a_{\overline{n}\vert i}$	$a_{\overline{n}\vert i}$	u^{-n}	n
1.11	0.900900901	0.900900901	1
0.583933649	1.712523334	0.811622433	2
0.40921307	2.443714715	0.731191381	3
0.322326352	3.10244569	0.658730974	4
0.27057031	3.695897018	0.593451328	5
0.236376564	4.230537854	0.534640836	6
0.212215269	4.712196265	0.481658411	7
0.194321054	5.146122761	0.433926496	8
0.180601664	5.537047532	0.390924771	9
0.169801427	5.889232011	0.352184479	10
0.161121007	6.206515325	0.317283314	11
0.154027286	6.492356149	0.285840824	12
0.148150993	6.749870404	0.257514256	13
0.143228202	6.981865229	0.231994825	14
0.13906524	7.190869576	0.209004347	15
0.135516747	7.37916178	0.188292204	16
0.132471485	7.548794396	0.169632616	17
0.12984287	7.701616573	0.152822177	18
0.127562504	7.83929421	0.137677637	19
0.125575637	7.963328117	0.124033907	20

معدل الفائدة i=0.11			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.12383793	8.075070376	0.111742259	21
0.122313101	8.175739077	0.100668701	22
0.120971182	8.266431601	0.090692524	23
0.119787211	8.348136578	0.081704976	24
0.118740242	8.421744665	0.073608087	25
0.117812575	8.488058256	0.066313592	26
0.116989164	8.547800231	0.059741975	27
0.116257145	8.60162183	0.053821599	28
0.11560547	8.650109757	0.048487927	29
0.115024598	8.693792573	0.043682817	30
0.114506267	8.733146463	0.039353889	31
0.114043285	8.768600417	0.035453954	32
0.113629379	8.800540916	0.031940499	33
0.113259055	8.829316141	0.028775225	34
0.11292749	8.855239766	0.025923626	35
0.112630441	8.878594384	0.023354618	36
0.112364164	8.89963458	0.021040196	37
0.112125351	8.918589712	0.018955132	38
0.111911071	8.935666407	0.017076695	39
0.111718727	8.951050817	0.01538441	40
0.111546009	8.964910646	0.013859829	41

معدل الفائدة
i=0.11

$1/a_{\overline{n}\mid i}$	$a_{\overline{n}\mid i}$	u^{-n}	n
0.111390863	8.977396978	0.012486332	42
0.111251462	8.988645927	0.011248948	43
0.111126173	8.998780114	0.010134187	44
0.111013542	9.007910013	0.009129899	45
0.110912268	9.016135147	0.008225134	46
0.110821188	9.023545177	0.007410031	47
0.110739262	9.03022088	0.006675703	48

معدل الفائدة
i=0.12

$1/a_{\overline{n}\mid i}$	$a_{\overline{n}\mid i}$	u^{-n}	n
1.12	0.892857143	0.892857143	1
0.591698113	1.69005102	0.797193878	2
0.416348981	2.401831268	0.711780248	3
0.329234436	3.037349347	0.635518078	4
0.277409732	3.604776202	0.567426856	5
0.243225718	4.111407324	0.506631121	6
0.219117736	4.563756539	0.452349215	7
0.201302841	4.967639767	0.403883228	8

معدل الفائدة i=0.12			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.187678889	5.328249792	0.360610025	9
0.176984164	5.650223028	0.321973237	10
0.168415404	5.937699133	0.287476104	11
0.161436808	6.194374225	0.256675093	12
0.155677195	6.423548416	0.22917419	13
0.150871246	6.628168228	0.204619813	14
0.14682424	6.810864489	0.182696261	15
0.143390018	6.973986151	0.163121662	16
0.140456728	7.119630492	0.145644341	17
0.137937311	7.249670082	0.13003959	18
0.135763005	7.365776859	0.116106777	19
0.13387878	7.469443624	0.103666765	20
0.132240092	7.562003236	0.092559612	21
0.130810509	7.644645746	0.08264251	22
0.129559965	7.718433702	0.073787956	23
0.128463442	7.784315806	0.065882103	24
0.12749997	7.843139112	0.058823307	25
0.126651858	7.895659921	0.052520809	26
0.125904094	7.942553501	0.04689358	27
0.125243869	7.984422769	0.041869268	28
0.124660207	8.021806044	0.037383275	29

معدل الفائدة i=0.12			
$1/a_{\overline{n}\rceil i}$	$a_{\overline{n}\rceil i}$	u^{-n}	n
0.124143658	8.055183968	0.033377924	30
0.123686057	8.084985685	0.029801718	31
0.123280326	8.111594362	0.026608677	32
0.12292031	8.135352109	0.023757747	33
0.122600638	8.156564383	0.021212274	34
0.122316619	8.175503913	0.01893953	35
0.122064141	8.192414208	0.016910295	36
0.121839592	8.207512686	0.015098478	37
0.1216398	8.22099347	0.013480784	38
0.121461967	8.233029884	0.012036414	39
0.121303626	8.243776682	0.010746798	40
0.121162598	8.253372037	0.009595356	41
0.121036958	8.261939319	0.008567282	42
0.120924999	8.269588678	0.007649359	43
0.12082521	8.276418462	0.006829785	44
0.120736252	8.282516484	0.006098022	45
0.120656936	8.287961147	0.005444662	46
0.120586206	8.292822452	0.004861306	47
0.120523125	8.297162904	0.004340452	48

الملحق رقم (3)

جـــــداول الحيـــــاة والوفـــــاة

جدول الحياة و الوفاة

احتمال الحياة px	احتمال الوفاة qx	الوفيات dx	الأحياء Lx	العمر x
0.96398	0.03602	3602	100000	0
0.972509803	0.0274902	2650	96398	1
0.979146222	0.02085378	1955	93748	2
0.984258059	0.01574194	1445	91793	3
0.988134768	0.01186523	1072	90348	4
0.991027824	0.00897218	801	89276	5
0.993128002	0.006872	608	88475	6
0.994605483	0.00539452	474	87867	7
0.995560285	0.00443971	388	87393	8
0.996126659	0.00387334	337	87005	9
0.996353902	0.0036461	316	86668	10
0.99635214	0.00364786	315	86352	11
0.996129572	0.00387043	333	86037	12
0.99577616	0.00422384	362	85704	13
0.995336411	0.00466359	398	85342	14
0.994843662	0.00515634	438	84944	15
0.99435543	0.00564457	477	84506	16
0.993906865	0.00609313	512	84029	17
0.993522277	0.00647772	541	83517	18
0.993239009	0.00676099	561	82976	19
0.993108051	0.00689195	568	82415	20
0.99307244	0.00692756	567	81847	21
0.993196358	0.00680364	553	81280	22
0.993372725	0.00662727	535	80727	23
0.993590383	0.00640962	514	80192	24
0.993762394	0.00623761	497	79678	25
0.993697983	0.00630202	499	79181	26
0.993632597	0.0063674	501	78682	27
0.993515048	0.00648495	507	78181	28
0.993485594	0.00651441	506	77674	29
0.993352167	0.00664783	513	77168	30
0.993255495	0.0067445	517	76655	31
0.993130894	0.00686911	523	76138	32
0.993004034	0.00699597	529	75615	33
0.992861519	0.00713848	536	75086	34
0.992716298	0.0072837	543	74550	35
0.992527734	0.00747227	553	74007	36
0.992348953	0.00765105	562	73454	37
0.992139055	0.00786094	573	72892	38

جدول الحياة و الوفاة

العمر x	الأحياء Lx	الوفيات dx	احتمال الوفاة qx	احتمال الحياة px
39	72319	586	0.00810299	0.991897012
40	71733	598	0.00833647	0.99166353
41	71135	614	0.00863148	0.991368525
42	70521	629	0.00891933	0.991080671
43	69892	647	0.00925714	0.99074286
44	69245	667	0.00963246	0.990367536
45	68578	688	0.01003237	0.989967628
46	67890	712	0.01048755	0.989512447
47	67178	737	0.01097085	0.989029146
48	66441	764	0.01149892	0.988501076
49	65677	795	0.01210469	0.987895306
50	64882	828	0.01276163	0.987238371
51	64054	862	0.0134574	0.986542605
52	63192	901	0.01425813	0.985741866
53	62291	942	0.01512257	0.98487743
54	61349	986	0.01607198	0.983928018
55	60363	1033	0.01711313	0.982886868
56	59330	1084	0.01827069	0.981729311
57	58246	1137	0.01952065	0.980479346
58	57109	1195	0.0209249	0.979075102
59	55914	1254	0.0224273	0.977572701
60	54660	1318	0.0241127	0.975887303
61	53342	1384	0.02594578	0.974054216
62	51958	1452	0.02794565	0.972054352
63	50506	1524	0.03017463	0.969825367
64	48982	1597	0.03260381	0.967396186
65	47385	1672	0.03528543	0.964714572
66	45713	1745	0.03817295	0.961827051
67	43968	1821	0.04141648	0.958583515
68	42147	1893	0.04491423	0.955085771
69	40254	1963	0.04876534	0.95123466
70	38291	2028	0.05296284	0.947037163
71	36263	2089	0.05760693	0.942393073
72	34174	2142	0.06267923	0.93732077
73	32032	2184	0.06818182	0.931818182
74	29848	2216	0.07424283	0.92575717
75	27632	2234	0.08084829	0.919151708
76	25398	2237	0.0880778	0.911922199

جدول الحياة و الوفاة

احتمال الحياة px	احتمال الوفاة qx	الوفيات dx	الأحياء Lx	العمر x
0.904062864	0.09593714	2222	23161	**77**
0.895505994	0.10449401	2188	20939	**78**
0.886139406	0.11386059	2135	18751	**79**
0.875962927	0.12403707	2061	16616	**80**
0.864926142	0.13507386	1966	14555	**81**
0.852887441	0.14711256	1852	12589	**82**
0.839899413	0.16010059	1719	10737	**83**
0.825792859	0.17420714	1571	9018	**84**
0.810662012	0.18933799	1410	7447	**85**
0.794103031	0.20589697	1243	6037	**86**
0.776595745	0.22340426	1071	4794	**87**
0.757453666	0.24254633	903	3723	**88**
0.737234043	0.26276596	741	2820	**89**
0.715247715	0.28475228	592	2079	**90**
0.69199731	0.30800269	458	1487	**91**
0.667638484	0.33236152	342	1029	**92**
0.640465793	0.35953421	247	687	**93**
0.613636364	0.38636364	170	440	**94**
0.585185185	0.41481481	112	270	**95**
0.550632911	0.44936709	71	158	**96**
0.517241379	0.48275862	42	87	**97**
0.488888889	0.51111111	23	45	**98**
0.454545455	0.54545455	12	22	**99**
0.4	0.6	6	10	**100**
0.25	0.75	3	4	**101**
0	1	1	1	**102**

الملحق رقم (4)

جـــــداول الرمـــــوز الحســــابية

جدول الرموز الحسابية

(i=3.5%)

Rx	Mx	Cx	Sx	Nx	Dx	العمر x
646179.5	25287.9	3480.193	46224873	2209343	100000	0
620891.5	21807.62	2473.803	44015530	2109342	93138.16	1
599084	19333.91	1763.298	41906188	2016204	87514.76	2
579750.1	17570.61	1259.234	39889983	1928690	82792.03	3
562179.5	16311.38	902.5952	37961294	1845898	78733.06	4
545868.1	15408.78	651.614	36115396	1767165	75168	5
530459.3	14757.17	477.8825	34348232	1691997	71974.47	6
515702.2	14279.28	359.9611	32656235	1620022	69062.67	7
501422.9	13919.32	284.6876	31036213	1550959	66367.25	8
487503.6	13634.64	238.9056	29485254	1484592	63838.26	9
473868.9	13395.73	216.4428	28000662	1420754	61440.58	10
460473.2	13179.29	208.4617	26579908	1359313	59146.43	11
447293.9	12970.82	212.9216	25220594	1300167	56937.85	12
434323.1	12757.9	223.637	23920427	1243229	54799.49	13
421565.2	12534.27	237.5625	22677198	1188430	52722.73	14
409030.9	12296.7	252.5972	21488769	1135707	50702.28	15
396734.2	12044.11	265.7862	20353062	1085005	48735.11	16
384690.1	11778.32	275.6409	19268058	1036269	46821.28	17
372911.8	11502.68	281.4042	18231788	989448.1	44962.31	18
361409.1	11221.28	281.9395	17242340	944485.8	43160.44	19
350187.8	10939.34	275.8043	16297854	901325.4	41418.97	20
339248.5	10663.53	266.0084	15396529	859906.4	39742.52	21
328585	10397.52	250.667	14536622	820163.9	38132.56	22
318187.4	10146.86	234.3071	13716459	782031.3	36592.39	23
308040.6	9912.549	217.4976	12934427	745438.9	35120.66	24
298128	9695.052	203.1923	12188988	710318.3	33715.51	25
288433	9491.859	197.1111	11478670	676602.8	32372.18	26
278941.1	9294.748	191.2088	10802067	644230.6	31080.35	27
269646.4	9103.539	186.9553	10157837	613150.3	29838.12	28
260542.8	8916.584	180.2769	9544686	583312.1	28642.14	29
251626.2	8736.307	176.5902	8961374	554670	27493.29	30
242889.9	8559.717	171.9489	8406704	527176.7	26386.98	31
234330.2	8387.768	168.0622	7879527	500789.7	25322.72	32
225942.5	8219.706	164.2418	7378738	475467	24298.33	33
217722.7	8055.464	160.7876	6903271	451168.7	23312.4	34
209667.3	7894.677	157.3792	6452102	427856.3	22363.28	35
201772.6	7737.297	154.8575	6024246	405493	21449.65	36
194035.3	7582.44	152.0558	5618753	384043.3	20569.44	37

جدول الرموز الحسابية

(i=3.5%)

Rx	Mx	Cx	Sx	Nx	Dx	العمر x
186452.9	7430.384	149.7894	5234709	363473.9	19721.8	38
179022.5	7280.595	148.0075	4871236	343752.1	18905.09	39
171741.9	7132.587	145.9308	4527483	324847	18117.78	40
164609.3	6986.656	144.7684	4202636	306729.2	17359.17	41
157622.6	6841.888	143.2899	3895907	289370.1	16627.38	42
150780.8	6698.598	142.4062	3606537	272742.7	15921.81	43
144082.2	6556.192	141.8437	3333794	256820.9	15240.98	44
137526	6414.348	141.3619	3076974	241579.9	14583.75	45
131111.6	6272.986	141.346	2835394	226996.1	13949.21	46
124838.6	6131.64	141.3614	2608398	213046.9	13336.15	47
118707	5990.279	141.5847	2395351	199710.8	12743.81	48
112716.7	5848.694	142.3474	2195640	186967	12171.28	49
106868	5706.347	143.2427	2008673	174795.7	11617.34	50
101161.7	5563.104	144.0818	1833877	163178.3	11081.24	51
95598.57	5419.022	145.5078	1670699	152097.1	10562.43	52
90179.54	5273.515	146.9847	1518602	141534.7	10059.74	53
84906.03	5126.53	148.6475	1377067	131474.9	9572.571	54
79779.5	4977.882	150.4668	1245592	121902.4	9100.213	55
74801.62	4827.416	152.556	1123690	112802.1	8642.01	56
69974.2	4674.86	154.6038	1010888	104160.1	8197.212	57
65299.34	4520.256	156.9955	906727.5	95962.93	7765.408	58
60779.09	4363.26	159.1756	810764.6	88197.52	7345.814	59
56415.83	4204.085	161.6419	722567	80851.7	6938.229	60
52211.74	4042.443	163.9964	641715.3	73913.47	6541.961	61
48169.3	3878.446	166.2358	567801.9	67371.51	6156.739	62
44290.85	3712.21	168.5787	500430.3	61214.77	5782.304	63
40578.64	3543.632	170.6798	439215.6	55432.47	5418.189	64
37035.01	3372.952	172.6526	383783.1	50014.28	5064.285	65
33662.06	3200.299	174.0973	333768.8	44950	4720.376	66
30461.76	3026.202	175.536	288818.8	40229.62	4386.653	67
27435.56	2850.666	176.3058	248589.2	35842.97	4062.776	68
24584.89	2674.36	176.6427	212746.2	31780.19	3749.082	69
21910.53	2497.718	176.3206	180966	28031.11	3445.658	70
19412.81	2321.397	175.4823	152934.9	24585.45	3152.818	71
17091.42	2145.915	173.8497	128349.5	21432.63	2870.719	72
14945.5	1972.065	171.2643	106916.9	18561.91	2599.792	73
12973.44	1800.801	167.8972	88354.94	15962.12	2340.612	74
11172.63	1632.904	163.5372	72392.82	13621.51	2093.563	75
9539.731	1469.366	158.2192	58771.31	11527.95	1859.229	76

جدول الرموز الحسابية

(i=3.5%)

Rx	Mx	Cx	Sx	Nx	Dx	العمر x
8070.365	1311.147	151.8437	47243.36	9668.718	1638.138	**77**
6759.218	1159.303	144.464	37574.64	8030.581	1430.898	**78**
5599.914	1014.839	136.1977	29544.06	6599.683	1238.046	**79**
4585.075	878.6417	127.031	22944.38	5361.637	1059.982	**80**
3706.433	751.6107	117.0779	17582.74	4301.655	897.1062	**81**
2954.822	634.5329	106.5594	13281.09	3404.549	749.6914	**82**
2320.29	527.9734	95.56228	9876.538	2654.857	617.7801	**83**
1792.316	432.4111	84.38135	7221.681	2037.077	501.3267	**84**
1359.905	348.0298	73.17269	5184.604	1535.75	399.9923	**85**
1011.875	274.8571	62.32477	3648.853	1135.758	313.2933	**86**
737.0181	212.5323	51.88463	2513.095	822.4647	240.3741	**87**
524.4858	160.6477	42.26653	1690.631	582.0906	180.3608	**88**
363.8381	118.3812	33.51095	1108.54	401.7298	131.9952	**89**
245.4569	84.87022	25.86723	706.8102	269.7347	94.0206	**90**
160.5867	59.00299	19.33541	437.0755	175.7141	64.97393	**91**
101.5837	39.66759	13.94998	261.3615	110.7401	43.44134	**92**
61.91615	25.71761	9.734285	150.6213	67.29879	28.02233	**93**
36.19854	15.98332	6.47315	83.32255	39.27646	17.34043	**94**
20.21522	9.510171	4.120448	44.04609	21.93603	10.28089	**95**
10.70505	5.389723	2.523739	22.11006	11.65515	5.812775	**96**
5.315326	2.865984	1.442431	10.45491	5.842373	3.092469	**97**
2.449342	1.423553	0.763191	4.61254	2.749904	1.545462	**98**
1.025789	0.660362	0.384721	1.862636	1.204442	0.730009	**99**
0.365426	0.275641	0.185856	0.658194	0.474433	0.320601	**100**
0.089785	0.089785	0.089785	0.183761	0.153832	0.123904	**101**
0	0	0	0.029928	0.029928	0.029928	**102**

RMB GLOBAL TRADINg LLC

اللجنة العلمية:

الأستاذ الدكتور ابراهيم محمد العلي

الدكتور عبـــــدالكريم حسين

الدكتور ماهـــــر بـــــدوي

المدقق اللغوي:

الأستاذة الدكتورة هدى الصحناوي